Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα 2016-17

Ενότητα 2η: Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

Άρης Παγουρτζής

Ε.Μ.Π. — Μ.Π.Λ.Α.

Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Αφορούν κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης: σε κάθε στιγμιότυπο αντιστοιχούν εφικτές (αποδεκτές / έγκυρες) λύσεις (feasible solutions) που η κάθε μια έχει μια τιμή μέσω μιας αντικειμενικής συνάρτησης (objective function) (συνήθως εκφράζει: κόστος, μήκος, βάρος, κ.λπ.). Ζητείται *βέλτιστη λύση*, δηλαδή εφικτή λύση με βέλτιστη τιμή.

- Προβλήματα ελαχιστοποίησης (minimization) / προβλήματα μεγιστοποίησης (maximization)

- Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για **NP**-optimization προβλήματα (κλάση **NPO**): το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι στην κλάση **NP**.

Συμβολισμοί

- Π: πρόβλημα βελτιστοποίησης
- I: στιγμιότυπο (είσοδος) του προβλήματος
- $SOL_A(\Pi, I)$: η τιμή της λύσης που επιστρέφει ο αλγόριθμος A για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.
- $OPT(\Pi, I)$: η τιμή της βέλτιστης λύσης για το στιγμιότυπο I του προβλήματος Π.

Παρατήρηση: *Συχνά* Π, A *και* I *παραλείπονται.*

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα ελαχιστοποίησης

Ενας αλγόριθμος A για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης (approximation ratio) ρ, και λέγεται ρ-προσεγγιστικός, αν για κάθε έγκυρο στιγμιότυπο I:

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho$$

- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου: Το ελάχιστο ρ (τυπικά infimum) που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση για κάθε στιγμιότυπο I λέγεται λόγος (ή παράγοντας) προσέγγισης του αλγορίθμου A. Ο αλγόριθμος A .

- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: Αν ισχύουν τα παραπάνω λέμε ότι το πρόβλημα Π προσεγγίζεται με λόγο (ή παράγοντα) ρ. Φυσικά, μας ενδιαφέρει το ελάχιστο ρ μεταξύ όλων των δυνατών προσεγγιστικών αλγορίθμων για το Π.

Προσοχή: Συνήθως ο όρος προσεγγιστικός αλγόριθμος αναφέρεται σε αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου ως προς το μέγεθος της εισόδου $|I|$. Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι όλοι οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που συζητούμε είναι πολυωνυμικού χρόνου (εκτός αν ρητά αναφέρουμε κάτι άλλο).

Προσεγγισιμότητα: προβλήματα μεγιστοποίησης

- Προβλήματα μεγιστοποίησης: ο αλγόριθμος A λέγεται ρ-προσεγγιστικός για το Π αν για κάθε I:

$$\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \geq \rho$$

(δηλαδή $\rho \leq 1$ για προβλήματα μεγιστοποίησης)

- Λόγος προσέγγισης αλγορίθμου: το μέγιστο ρ (τυπικά supremum) που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση (για κάθε I).
- Λόγος προσέγγισης προβλήματος: το μέγιστο ρ μεταξύ όλων των αλγορίθμων που το επιλύουν.

Προσεγγισιμότητα: εναλλακτικοί ορισμοί

- Εναλλακτικός ορισμός του λόγου προσέγγισης, κοινός για προβλήματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης:

  Ενας αλγόριθμος A για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης/μεγιστοποίησης Π επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης (approximation ratio) ρ', και λέγεται ρ'-προσεγγιστικός, αν για κάθε έγκυρο στιγμιότυπο I:

$$\max\{\frac{SOL_A(I)}{OPT(I)}, \frac{OPT(I)}{SOL_A(I)}\} \leq \rho'$$

  Με βάση τον ορισμό αυτό ισχύει πάντοτε $\rho' \geq 1$.

  Ακολουθείται σε ορισμένα βιβλία, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τους προηγούμενους ορισμούς

- Ένας ακόμη ορισμός εξετάζει το *σχετικό σφάλμα*. Ένας αλγόριθμος A έχει *σχετικό σφάλμα προσέγγισης* ϵ αν:

$$\forall I : \quad \frac{|SOL_A(I) - OPT(I)|}{OPT(I)} \leq \epsilon$$

Ακολουθήθηκε (με κάποιες παραλλαγές) στην πρώιμη βιβλιογραφία, αλλά έχει πρακτικά εγκαταλειφθεί.

Προσεγγισιμότητα: άλλες έννοιες

- Ο λόγος προσέγγισης στην γενική περίπτωση είναι συνάρτηση του μεγέθους (μήκους) της εισόδου:

$$\forall I : \quad \frac{SOL_A(I)}{OPT(I)} \leq \rho(|I|) \quad (\geq \quad \text{για max})$$

- Ασυμπτωτικός λόγος προσέγγισης: η ανισότητα ισχύει $\forall |I| \geq n_0$.
- **APX**: κλάση προβλημάτων που επιλύονται με σταθερό λόγο προσέγγισης σε πολυωνυμικό χρόνο. Υποκλάση της **NPO** (το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι στην **NP** – τυπικός ορισμός αργότερα).
- Πιθανοτικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι: ο λόγος προσέγγισης επιτυγχάνεται *με μεγάλη πιθανότητα* (τυπικοί ορισμοί αργότερα).

Το πρόβλημα Vertex Cover (VC)

Δίνεται: *γράφος $G(V, E)$*

Ζητείται: *Κάλυψη κορυφών (vertex cover)* *ελάχιστης πληθικότητας, δηλαδή ένα ελάχιστο σύνολο κόμβων V' έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον έναν από τους κόμβους της στο V'.*

Weighted Vertex Cover (WVC): οι κόμβοι έχουν και βάρος και το ζητούμενο είναι το σύνολο V' να είναι ελαχίστου βάρους.

Παρατήρηση: *Συχνά ο όρος* Vertex Cover *χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι "Unweighted" ή "Cardinality".*

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Vertex Cover

Βρες maximal matching $M_{\max}$ με οποιαδήποτε μέθοδο (π.χ. greedy). Επίστρεψε το σύνολο V' των κόμβων που προσπίπτουν στις ακμές του $M_{\max}$.

Θεώρημα. *Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός.*

Απόδειξη.

1. Το V' είναι εφικτή λύση (γιατί;)
2. $|M_{\max}| \leq OPT$
3. $SOL = 2 \cdot |M_{\max}| \leq 2 \cdot OPT$ $\square$

Ανελαστική Ανάλυση (Tight Analysis)

Η παραπάνω ανάλυση είναι ανελαστική (tight), δηλαδή αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει καλύτερο λόγο.

Η απόδειξη συνήθως συνίσταται στη εύρεση ανελαστικού παραδείγματος (tight example): άπειρη οικογένεια στιγμιοτύπων για τα οποία ο αλγόριθμος δεν μπορεί να πετύχει καλύτερο λόγο.

Για τον προηγούμενο αλγόριθμο για το VC ένα tight example είναι οι πλήρεις διμερείς γράφοι $K_{n,n}$.

Ανελαστικότητα κάτω φράγματος ως προς OPT

Ένα διαφορετικό είδος ανελαστικότητας (tightness): αφορά στο λόγο της αντικειμενικής τιμής της βέλτιστης λύσης προς το κάτω φράγμα που χρησιμοποιούμε για το OPT.

Παράδειγμα: για το Vertex Cover, εξετάζοντας πλήρεις γράφους K_n αποδεικνύεται ότι το μέγεθος του maximal matching ως κάτω φράγμα για το OPT δεν μπορεί να δώσει καλύτερο λόγο προσέγγισης από 2.

Ενδεικτικά, δεν μπορεί να υπάρχει αλγόριθμος που να βρίσκει, σε κάθε γράφο, vertex cover μεγέθους $\leq \frac{3}{2}|M_{\max}|$.

Φαινομενικά παράδοξο: ο 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος επιτυγχάνει βέλτιστη (ή σχεδόν βέλτιστη) λύση για κάθε γράφο K_n. Η ανελαστικότητα αυτή μας δίνει μια αξιολόγηση του κάτω φράγματος και *όχι κάποιου αλγορίθμου.*

Προσεγγίζοντας το Weighted Vertex Cover (WVC)

Ορισμός. *Degree-weighted συνάρτηση* $w : V \to \mathbf{Q}$ *(σε γράφο* $G(V,E)$*):* $\exists c > 0, \forall v \in V, w(v) = c \cdot deg(v)$, *όπου* $deg(v)$ *είναι ο βαθμός του κόμβου* v.

Λήμμα. *Αν η συνάρτηση βαρών* w *σε γράφο* $G(V,E)$ *είναι degree-weighted τότε:* $w(V) \leq 2 \cdot OPT_{WVC}$.

Παρατήρηση: $w(V) = \sum_{v \in V} w(v)$.

Απόδειξη.

Αν U είναι vertex cover τότε $deg(U)(= \sum_{u \in U} deg(u)) \geq |E|$.

Οπότε $deg(V)(= \sum_{v \in V} deg(v)) = 2|E| \leq 2deg(U)$.

Επομένως, αν w είναι degree-weighted: $w(V) \leq 2w(U)$.

Αυτό ισχύει και για vertex cover U^* ελαχίστου βάρους. Αρα:

$$w(V) \leq 2w(U^*) = 2OPT_{WVC}$$

□

Ερώτηση: τι συμπεραίνουμε από το παραπάνω λήμμα;

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Weighted Vertex Cover (WVC)

Βασίζεται σε κατάλληλη διάσπαση (decomposition) της δοθείσης συνάρτησης βάρους σε degree-weighted συναρτήσεις.

Επανάλαβε για όσο υπάρχουν ακμές στο γράφο:
  βρές μέγιστο c τ.ώ. $\forall v \in V, \ c \cdot deg(v) \le w(v)$
    (όπου w η τρέχουσα συνάρτηση βάρους)
  $\forall v \in V$ θέσε $w(v) := w(v) - c \cdot deg(v)$
  πρόσθεσε τους κόμβους μηδενικού βάρους στην κάλυψη
    και αφαίρεσέ τους από το γράφο (μαζί με τις ακμές τους)

Θεώρημα. *Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός για το πρόβλημα* WVC.

Το πρόβλημα Set Cover

Δίνεται: *σύνολο* U *με* n *στοιχεία και συλλογή υποσυνόλων του* U, $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}, \forall i, S_i \subseteq U$

Ζητείται: Μία ελάχιστης πληθικότητας *συλλογή* $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ *τ.ώ. κάθε στοιχείο του* U *να ανήκει σε τουλάχιστον ένα σύνολο της* $\mathcal{S}'$: $\bigcup_{S \in \mathcal{S}'} S = U$.

Weighted Set Cover: τα υποσύνολα έχουν βάρος (κόστος) και το ζητούμενο είναι η $\mathcal{S}'$ να είναι ελαχίστου βάρους.

Παρατήρηση: *Συχνά ο όρος* Set Cover *χρησιμοποιείται για την weighted εκδοχή του προβλήματος. Τότε για το πρώτο πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι "Unweighted" ή "Cardinality".*

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα Weighted Set Cover

$C := \emptyset$

Επανάλαβε για όσο $C \neq U$:

Βρές το σύνολο S_i με το μικρότερο λόγο κόστους/νέο στοιχείο:

$\alpha_i = cost(S_i)/|S_i - C|$

$\forall e \in S_i - C$ θέσε $price(e) := \alpha_i$

$C := C \cup S_i$

Παρατήρηση: $price(e_k)$ *είναι η τιμή που "πληρώσαμε" για να καλυφθεί το στοιχείο* e_k.

Συνολικό κόστος κάλυψης: $\sum_{k=1}^{n} price(e_k)$.

Ανάλυση του αλγορίθμου για το Weighted Set Cover

Θεώρημα. *Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι H_n-προσεγγιστικός, όπου* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} < \log n + 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του U αριθμούνται με τη σειρά που καλύπτονται από τον αλγόριθμο.

Σε οποιαδήποτε επανάληψη του αλγορίθμου μπορούμε να καλύψουμε όλα τα εναπομείναντα στοιχεία με κόστος το πολύ OPT (γιατί;).

Οπότε, θα πρέπει να υπάρχει σύνολο με κόστος/νέο στοιχείο το πολύ $OPT/|U - C|$ (όπου C είναι η τρέχουσα κάλυψη). Πριν την επανάληψη όπου καλύπτεται το στοιχείο e_k για πρώτη φορά ισχύει $|U - C| \geq n - k + 1$.

Άρα το e_k καλύπτεται με κόστος το πολύ $\frac{OPT}{n-k+1}$. Αθροίζοντας για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n\}$ παίρνουμε συνολικό κόστος το πολύ $H_n \cdot OPT$. □

Tight example

$U = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, S_i = \{a_i\}, cost(S_i) = \frac{1}{i}$

$S_{n+1} = U, cost(S_{n+1}) = 1 + \varepsilon$, για σταθερά $\varepsilon > 0$

$SOL = H_n, \quad OPT = 1 + \varepsilon$, επομένως $\rho(n) = \Omega(H(n)) = \Omega(\log n)$.

Παρατήρηση: *Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος έχει το ίδιο κάτω φράγμα λόγου προσέγγισης και για το* (Cardinality) Set Cover *και για το* Vertex Cover*!*

Tight example για τον ίδιο αλγόριθμο για το πρόβλημα Set Cover

$$U = \{a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_m\}, \quad m = 2^k - 1$$

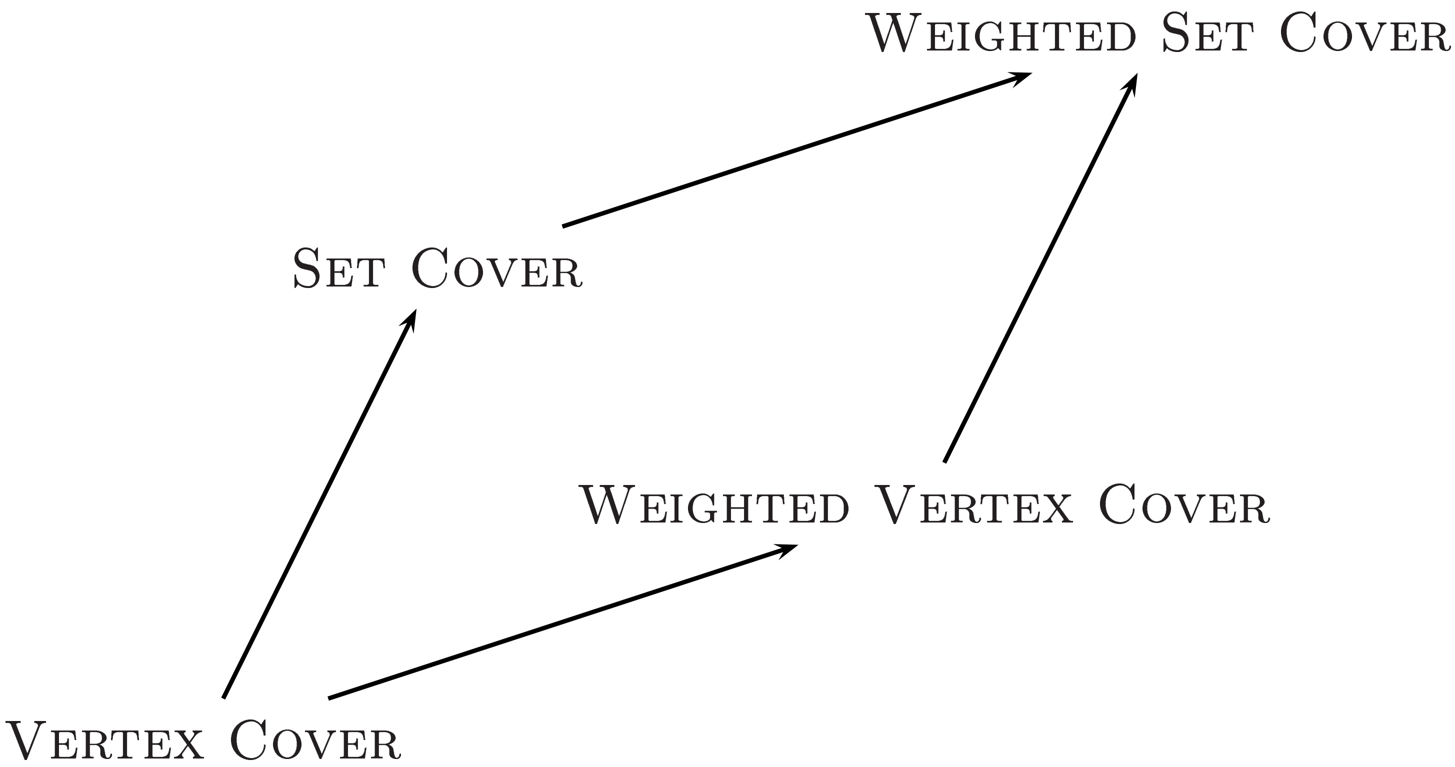
$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}, S_i = \{a_{2^{i-1}}, \ldots a_{2^i - 1}, a'_{2^{i-1}}, \ldots a'_{2^i - 1}\}$$

$$S_{k+1} = \{a_1, \ldots a_m\}$$

$$S_{k+2} = \{a'_1, \ldots a'_m\}$$

$$SOL = k, \quad OPT = 2$$

Ιεράρχηση Προβλημάτων



Πρόβλημα μεγιστοποίησης: Maximum Coverage

Δίνεται: σύνολο U με n στοιχεία, συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_l\}$ υποσυνόλων του U, και ακέραιος k.
Ζητείται: Μία συλλογή $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{S}'| \leq k$, τ.ώ. το πλήθος των στοιχείων που καλύπτει η $\mathcal{S}'$ να είναι μέγιστο.

Θεώρημα. *Ο άπληστος (greedy) αλγόριθμος που κάθε φορά επιλέγει το μεγαλύτερο, ως προς πλήθος νέων στοιχείων, σύνολο επιτυγχάνει (με k επαναλήψεις) λόγο προσέγγισης*

$$1 - (1 - \tfrac{1}{k})^k > 1 - \tfrac{1}{e}$$

για το πρόβλημα Maximum Coverage.

Παρατήρηση: *Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση* **APX**, *παρ'ότι το* Set Cover *δεν ανήκει.*

Απόδειξη (i)

Έστω $\mathcal{S}^*$ μια βέλτιστη λύση με πλήθος στοιχείων n_{OPT}. Αφού το πλήθος των συνόλων της $\mathcal{S}^*$ είναι k θα πρέπει να υπάρχει σύνολο στην $\mathcal{S}$ με πληθικότητα $\geq \frac{n_{OPT}}{k}$. Επομένως, ο άπληστος αλγόριθμος στο 1ο βήμα θα βρεί και θα επιλέξει σύνολο τουλάχιστον τόσων στοιχείων.

Με άλλα λόγια, στο 1ο βήμα, καλύπτεται πλήθος στοιχείων που αντιπροσωπεύουν τουλάχιστον το $\frac{1}{k}$ του n_{OPT} ή, ισοδύναμα, μένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $1 - \frac{1}{k}$ των στοιχείων της βέλτιστης λύσης (ένωση των συνόλων της $\mathcal{S}^*$).

Παρατήρηση: *Κάθε φορά που ο άπληστος αλγόριθμος καλύπτει στοιχεία που δεν ανήκουν στη βέλτιστη λύση μπορούμε, για τις ανάγκες της απόδειξης και μόνο, να "σβήνουμε" ισάριθμο πλήθος στοιχείων από τη βέλτιστη λύση, θεωρώντας ότι το αντίστοιχο μέρος έχει καλυφθεί.*

Απόδειξη (ii)

Με ανάλογα επιχειρήματα μπορούμε να δείξουμε ότι στο i-οστό βήμα, το ακάλυπτο μέρος της βέλτιστης λύσης μειώνεται τουλάχιστον κατά $\frac{1}{k}$ (αφού τα k σύνολα της $\mathcal{S}^*$ αρκούν για να το καλύψουν πλήρως) και επομένως απομένει ακάλυπτο το πολύ ένα μέρος $(1-\frac{1}{k})^i$ της βέλτιστης λύσης.

Τελικά, σε k βήματα έχει καλυφθεί τουλάχιστον το $1-(1-\frac{1}{k})^k$ της βέλτιστης λύσης. Επομένως:

$$SOL \geq (1-(1-\frac{1}{k})^k)n_{OPT} > (1-\frac{1}{e})n_{OPT}$$

Γενικεύσεις

- Το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση που τα στοιχεία έχουν βάρος και ζητείται λύση που καλύπτει μέγιστο βάρος στοιχείων.

- Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμη και σε περιπτώσεις όπου δεν δίνονται τα σύνολα της $\mathcal{S}$ αναλυτικά (μπορεί να είναι και εκθετικά πολλά), αλλά μπορούμε να βρίσκουμε το "καλύτερο" σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο.

- Εάν μπορούμε να βρίσκουμε το "καλύτερο" σύνολο σε πολυωνυμικό χρόνο με προσέγγιση ρ (≤ 1) τότε ο άπληστος αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης
$$1-(1-\frac{\rho}{k})^k > 1-\frac{1}{e^\rho}$$
για το πρόβλημα Maximum Coverage.

Το Traveling Salesman Problem (TSP)
Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή

Δίνεται: *πλήρης γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του.*

Ζητείται: *κύκλος ελαχίστου κόστους* *που να επισκέπτεται κάθε κόμβο ακριβώς μία φορά* (*Hamilton Cycle*).

Μη-προσεγγισιμότητα του TSP

Θεώρημα. *Το πρόβλημα TSP δεν μπορεί να προσεγγιστεί με παράγοντα $\alpha(n), n = |V|$, για οποιαδήποτε πολυωνυμικά υπολογιστή συνάρτηση $\alpha(n)$, εκτός εάν* $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.

Απόδειξη. Αναγωγή από το Hamilton Cycle: συμπληρώνουμε τον αρχικό γράφο G με ακμές ώστε να κατασκευάσουμε πλήρη γράφο G'. Στις αρχικές ακμές δίνουμε βάρος 1, στις υπόλοιπες δίνουμε βάρος $\alpha(n) \cdot n$. Ισχύει ότι:

- Αν ο G είναι Hamilton τότε υπάρχει κύκλος TSP κόστους n στον G', ενώ
- Αν ο G δεν είναι Hamilton τότε ο βέλτιστος κύκλος TSP στον G' έχει κόστος $> \alpha(n) \cdot n$.

□

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (i) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Πστο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι 'yes'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \leq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι 'no'-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') > \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Θεώρημα. *Αν το πρόβλημα Π είναι* **NP***-complete και υπάρχει αναγωγή εισαγωγής χάσματος με παραμέτρους f, α από το Π στο πρόβλημα Π' τότε το Π' δεν προσεγγίζεται με παράγοντα $\alpha(|I'|)$, εφ'όσον* $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

Αναγωγές Εισαγωγής Χάσματος (ii) (Gap Introducing Reductions)

Μια αναγωγή h από το πρόβλημα απόφασης Π στο πρόβλημα μεγιστοποίησης Π' (που απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π') λέγεται *αναγωγή εισαγωγής χάσματος* όταν υπάρχουν συναρτήσεις f, α ώστε:

- Αν το I είναι ‘yes’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') \geq f(I')$, ενώ
- Αν το I είναι ‘no’-instance του Π τότε $OPT_{\Pi'}(I') < \alpha(|I'|) \cdot f(I')$.

Το πρόβλημα Metric TSP

Επιπλέον υπόθεση: τα δοθέντα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.
Το πρόβλημα παραμένει **NP**-complete (γιατί;)

Προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP

Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον γράφο G.
Διπλασίασε τις ακμές του T.
Βρες έναν κύκλο Euler C στο διπλασιασμένο T.
Δώσε σαν έξοδο τον κύκλο που επισκέπτεται τους κόμβους με τη σειρά εμφάνισής τους στον C (short-cutting).

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός:

$$cost(C) \leq cost(C_T) \leq 2cost(T) \leq 2OPT$$

$\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric TSP (Christofides' algorithm)

Βασίζεται στην εύρεση "φτηνότερου" κύκλου Euler. Βρίσκει Eulerian completion του δέντρου T, παίρνοντας perfect matching M πάνω στους κόμβους περιττού βαθμού του T.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι $\frac{3}{2}$-προσεγγιστικός:

$cost(M) \leq \frac{1}{2}OPT$: με short-cutting στον βέλτιστο κύκλο, παίρνουμε κύκλο στους κόμβους περιττού βαθμού του T.

$$cost(C) \leq cost(C_{T,M}) = cost(T) + cost(M) \leq \frac{3}{2}OPT$$

Το πρόβλημα METRIC TSP$_{(s,t)-path}$

Δίνονται επιπλέον 2 κόμβοι s, t και ζητείται Hamilton path ελαχίστου κόστους από s σε t.

$\frac{5}{3}$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το METRIC TSP$_{(s,t)-path}$

Εκτέλεσε ανεξάρτητα τους δύο παρακάτω αλγορίθμους και επίλεξε την καλύτερη από τις δύο λύσεις:

1. Βρες ελάχιστο συνδετικό δέντρο T στον γράφο G. Διπλασίασε τις ακμές του T. Αφαίρεσε ελάχιστο (s,t)-path από το διπλασιασμένο δένδρο. Βρες (s,t)-Euler path $P_{s,t}$, εκτέλεσε short-cutting για να βρείς (s,t)-Hamilton path κόστους:

$$SOL_1 \leq 2OPT_{s,t} - c_{s,t}$$

2. Με μικρή τροποποίηση του αλγόριθμου του Χριστοφίδη (Eulerian completion ώστε να προκύπτει (s,t)-Euler path με short-cutting), βρες (s,t)-Hamilton path με κόστος

$$SOL_2 \leq (3OPT_{s,t} + c_{s,t})/2$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η επιλογή της καλύτερης λύσης δίνει $\frac{5}{3}$-προσεγγιστικό αλγόριθμο:

$$\min\{SOL_1, SOL_2\} \leq \frac{5}{3} OPT_{s,t}$$

Το Πρόβλημα Steiner Tree

Δίνεται: *γράφος* $G(V, E)$ *με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του οι κόμβοι του οποίου χωρίζονται σε δύο σύνολα:* απαραίτητοι *και* Steiner.
Ζητείται: *δέντρο ελαχίστου κόστους που να περιέχει όλους τους απαραίτητους κόμβους.*

Το Πρόβλημα Metric Steiner Tree

Επιπλέον υπόθεση: ο γράφος είναι πλήρης και τα δοθέντα βάρη ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα.

Ισοδυναμία προσεγγισιμότητας Steiner Tree και Metric Steiner Tree

Θεώρημα. *Δοθέντος ρ-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το* Metric Steiner Tree *μπορούμε να κατασκευάσουμε ρ-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Steiner Tree.

Απόδειξη: με αναγωγή διατήρησης του παράγοντα προσέγγισης από το Steiner Tree στο Metric Steiner Tree.

Steiner Tree $\leq_{\text{apx.pres.}}$ Metric Steiner Tree

Συμπλήρωση του αρχικού γράφου G σε πλήρη γράφο G'. Οι ακμές του G' έχουν το βάρος των συντομότερων μονοπατιών στον G (*metric closure*). Οι απαραίτητοι κόμβοι είναι ίδιοι.

$OPT(I') \leq OPT(I)$ (γιατί;)

Κάθε λύση του I' με κόστος $SOL(I')$ δίνει λύση του I με κόστος $SOL(I) \leq SOL(I')$: αντικατάσταση κάθε ακμής της λύσης με το αντίστοιχο μονοπάτι. Επομένως:

$$SOL(I) \leq SOL(I') \leq \rho OPT(I') \leq \rho OPT(I)$$

Παρατήρηση: *Ισχύει επιπλέον ότι* $OPT(I) = OPT(I')$, *αλλά δεν το χρειαζόμαστε.*

Αναγωγές Διατήρησης Παράγοντα Προσέγγισης (Approximation Factor Preserving Reductions)

Μια *αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης* από το πρόβλημα ελαχιστοποίησ
Π στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης Π' είναι ένα ζεύγος συναρτήσεων πολυωνυμικού χρόνου h, g, όπου η h απεικονίζει κάθε στιγμιότυπο I του Π σε κάποιο στιγμιότυπο $I' = h(I)$ του Π' και η g απεικονίζει λύσεις του I' σε λύσεις του I, ώστε:

- $OPT(I') \leq OPT(I)$
- για κάθε λύση S' του I' με κόστος $SOL(I', S')$ η $S = g(S')$ είναι λύση του I με κόστος $SOL(I, S) \leq SOL(I', S')$.

Θεώρημα. *Μια αναγωγή διατήρησης παράγοντα προσέγγισης από το πρόβλημα* Π *στο πρόβλημα* Π' *μαζί με έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π' *δίνουν έναν* ρ*-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το* Π.

2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το Metric Steiner Tree (και το Steiner Tree)

Αλγόριθμος: βρες και επίστρεψε ελάχιστο συνδετικό δένδρο στον παραγόμενο (node-induced) υπογράφο των απαιτούμενων κόμβων (R).

Η απόδειξη βασίζεται στο ότι ένα τέτοιο δένδρο είναι εφικτή λύση για το Metric Steiner Tree και χρησιμοποιεί παρόμοια τεχνική με τον αλγόριθμο για το TSP: από μια οποιαδήποτε λύση για το Metric Steiner Tree μπορούμε να κατασκευάσουμε συνδετικό δέντρο στους κόμβους του R μόνο, διπλάσιου το πολύ κόστους (short-cutting στον αντίστοιχο κύκλο Euler). Επομένως και στη βέλτιστη λύση αντιστοιχεί ένα συνδετικό δέντρο T_R^*, με κόστος το πολύ $2 \cdot OPT$. Αρα:

$$cost(\mathrm{MST}_R) \leq cost(T_R^*) \leq 2 \cdot OPT$$

Multiway Cut / Minimum k-Cut

Είναι γενικεύσεις του προβλήματος min-cut (θυμηθείτε το θεώρημα max-flow / min-cut):

Στο πρόβλημα Multiway Cut δίνεται γράφος G και k κόμβοι (terminals). Ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε κάθε terminal να βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα (connected component). **NP**-hard, ακόμη και για fixed $k \geq 3$. Για $k = 2$;

Στο πρόβλημα Minimum k-Cut δίνεται γράφος G και ζητείται η ελάχιστη τομή τέτοια ώστε ο γράφος να διασπάται σε k συνεκτικές συνιστώσες. Πολυωνυμικά επιλύσιμο για fixed k, **NP**-hard για k που είναι μέρος της εισόδου.

Αλγόριθμος για το Multiway Cut

Βρες isolating cut C_i για κάθε terminal s_i.

Δώσε σαν λύση την ένωση όλων αυτών των cuts, εκτός από την βαρύτερ

Ορθότητα και λόγος προσέγγισης.

Έστω A η βέλτιστη λύση, χωρίζοντας τον γράφο σε συνιστώσες $V_1, \ldots, V_k$. Αν A_i είναι η τομή-υποσύνολο της A που χωρίζει το V_i από τις υπόλοιπες συνιστώσες, τότε είναι isolating cut για το s_i. Άρα, $w(C_i) \leq w(A_i)$.

Κάθε edge της A, περιλαμβάνεται σε δύο τομές A_i, A_j, οπότε

$$\sum_{i=1}^{k} w(A_i) = 2w(A) = 2OPT$$

Επομένως:

$$w(C) \leq (1 - 1/k) \sum_{i=1}^{k} w(C_i) \leq (1 - 1/k) \sum_{i=1}^{k} w(A_i)$$
$$= 2(1 - 1/k)OPT$$

Αλγόριθμος για το Minimum k-Cut

1. `Compute Gomory-Hu tree` T.
2. `Output the union of cuts corresponding to lightest` $k-1$ `edges of` T.

Με απόδειξη παρόμοια (κάπως πιο δύσκολη) αυτής για το multiway cut αποδεικνύεται ότι η λύση είναι κόστους $\leq 2(1-1/k)OPT$.

Σημαντικές ιδιότητες δέντρου Gomory-Hu: κάθε ακμή του δέντρου αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη τομή στον γράφο, και για κάθε ζεύγος (u,v) υπάρχει μια ακμή του δέντρου που αντιστοιχεί σε μια ελάχιστη (u,v)-cut.

Κατασκευή δένδρου Gomory-Hu

1. construct tree T with unique node the set $S_0 = V$
2. while there is S_i s.t. $|S_i| \geq 2$ do
   choose two vertices in S_i, say x, y
   compute minimum $x{-}y$ cut in G' (= G with subtrees of S_i in T collapsed)
   split S_i accordingly to S_i^x, S_i^y, with an edge between them
   with weight equal to that of the cut
   stick each subtree of S_i in T to S_i^x or S_i^y according to the cut

Ανακεφαλαιώνοντας

- Προσεγγισιμότητα **NP**-hard προβλημάτων. Μεγάλη ποικιλία ως προς τον λόγο προσέγγισης: (F)PTAS $(1+\varepsilon)$, **APX**, log-**APX**, *poly*-**APX**, μη-προσεγγίσιμα προβλήματα.
- Τεχνικές προσεγγιστικής επίλυσης: lower bounds, άπληστη μέθοδος, δυναμικός προγραμματισμός, γραμμικός προγραμματισμός (επόμενη ενότητα).
- Σημαντικα εργαλεία: tight analysis, αναγωγές διατήρησης προσεγγιστικού λόγου.