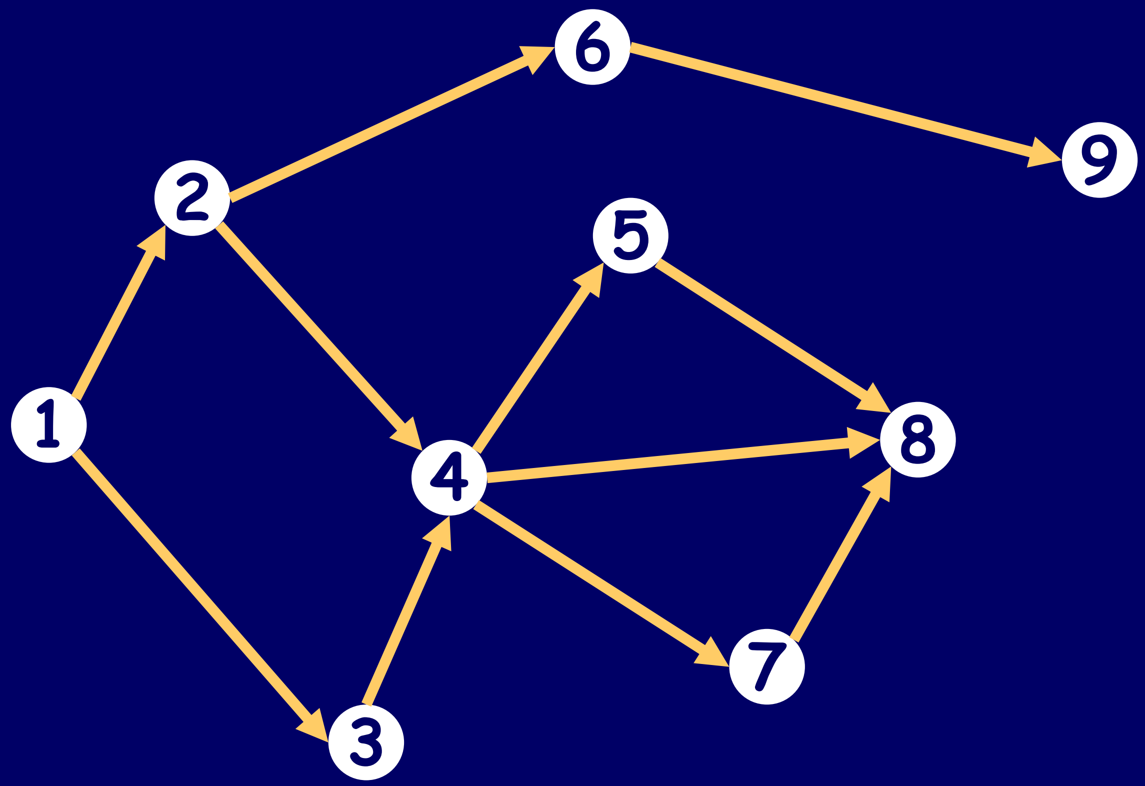
Fast broadcasting and gossiping in radio networks.
Chrobak, Gasieniec, Rytter 2002.

Διδάσκων: Άρης Παγουρτζής
Παρουσίαση: Νίκος Λεονάρδος
nleon@cs.ntua.gr

Το μοντέλο



Broadcasting:
Ένας σε όλους

Gossiping:
Όλοι σε όλους

RoundRobin

Broadcasting και *gossiping* σε χρόνο $O(n^2)$

Stage 1:

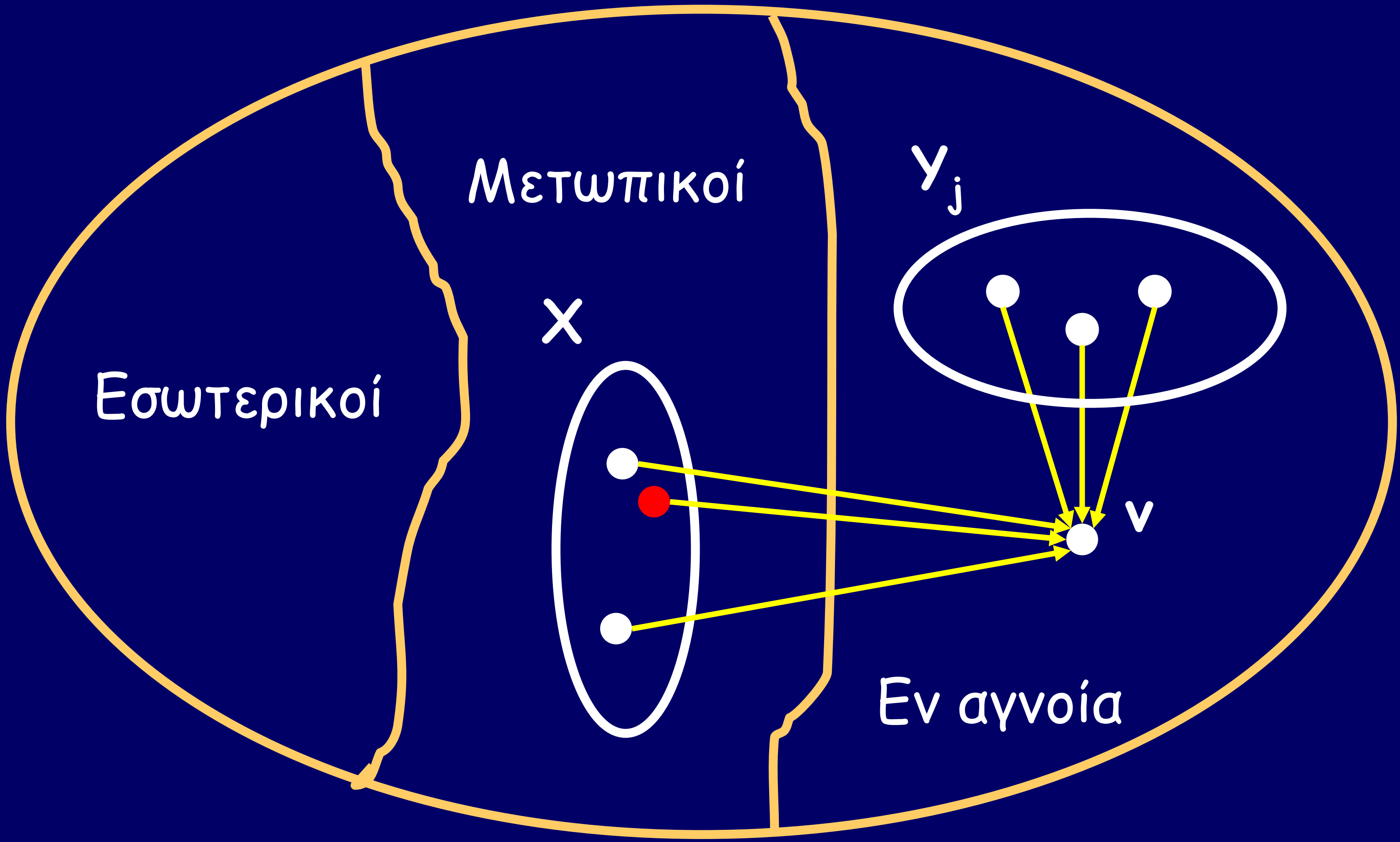
  Step 1: node **1** transmits
  Step 2: node **2** transmits
  …
  Step n: node **n** transmits

Stage 2:

  Step 1: node **1** transmits
  Step 2: node **2** transmits
  …
  Step n: node **n** transmits

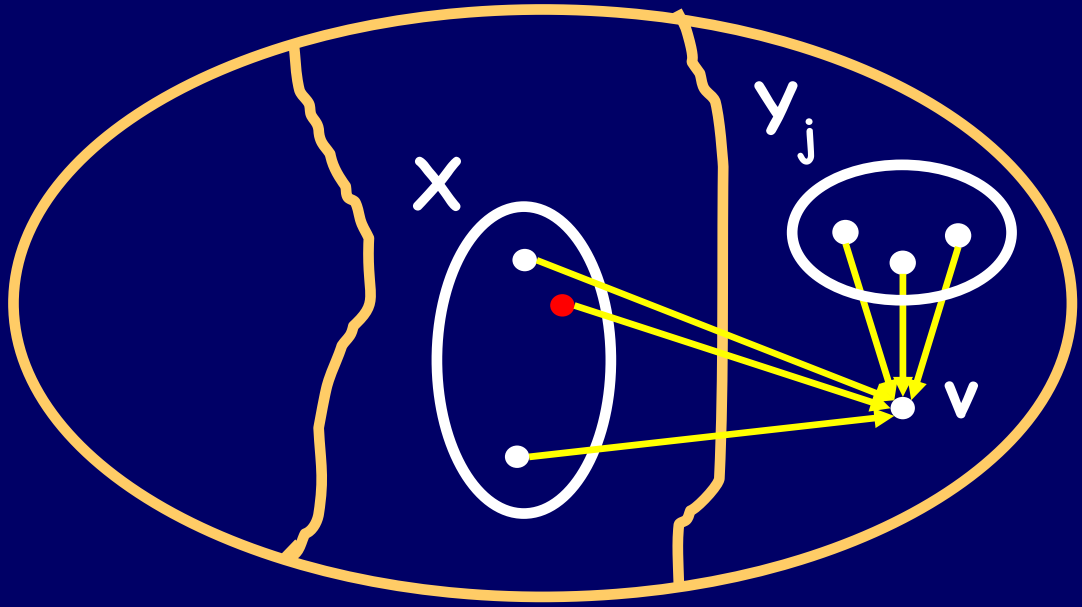
.
.
.

Μπορούμε καλύτερα;



Selectors

w-selector: Οικογένεια συνόλων S, τέτοια που «για κάθε δύο ξένα σύνολα X,Y με $w/2 \leq |X| \leq w$ και $|Y| \leq w$, υπάρχει σύνολο στην S που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του X και κανένα του Y».



Υπάρχουν «μικροί» **selectors**

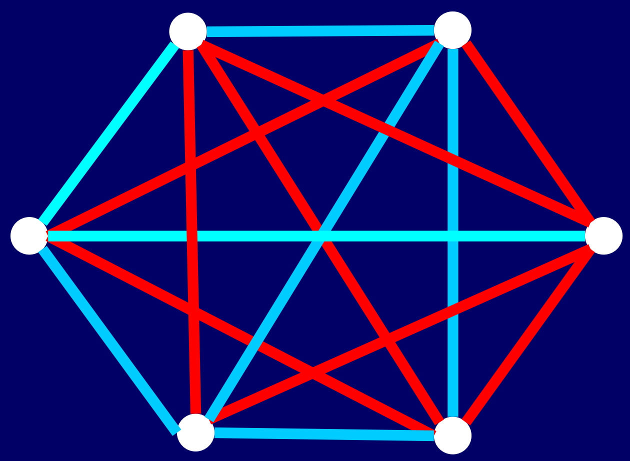
Λήμμα: Για κάθε n και $w \le n$
υπάρχει ένας w-selector S
που περιέχει $O(w \log n)$ σύνολα.

Απόδειξη: Με την «probabilistic method»:

Για να δείξουμε ότι υπάρχουν (μικροί) selectors, κατασκευάζουμε μία οικογένεια S (μεγέθους $c w \log n$) με τυχαίο τρόπο και αποδεικνύουμε ότι με θετική πιθανότητα είναι w-selector!

Αριθμοί **Ramsey** και η **probabilistic method**

R(κ) := Ο ελάχιστος n, τέτοιος που κάθε 2-χρωματισμένος και πλήρης γράφος σε n κόμβους, περιέχει είτε μία κόκκινη, είτε μία μπλε κ-κλίκα.



R(3) = 6

Ένα θεώρημα του **Paul Erdös**

Θεώρημα: Για κάθε κ ≥ 3, $R(\kappa) \geq 2^{\kappa/2}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι για $n \leq 2^{\kappa/2}$ υπάρχει γράφος, χωρίς κόκκινη ή μπλε κ-κλίκα.

Με πιθανότητα ½ βάφουμε μία ακμή με κόκκινο και με πιθανότητα ½ με μπλε χρώμα.

Η πιθανότητα να υπάρχει μπλε κλίκα είναι το πολύ:

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να υπάρχει μπλε ή κόκκινη είναι αυστηρά μικρότερη από ½+½=1.

Λήμμα: Για κάθε n και w ≤ n υπάρχει w-selector S, που περιέχει $O(w \log n)$ σύνολα

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε με τυχαίο τρόπο οικογένεια $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$.

Σε κάθε S_i εισάγουμε κάθε στοιχείο από το $\{1,2,\ldots,n\}$ με πιθανότητα $1/(w+1)$.

Για ξένα σύνολα X,Y με $w/2 \le |X| \le w$ και $|Y| \le w$, η πιθανότητα το S_i να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του X και κανένα του Y είναι:

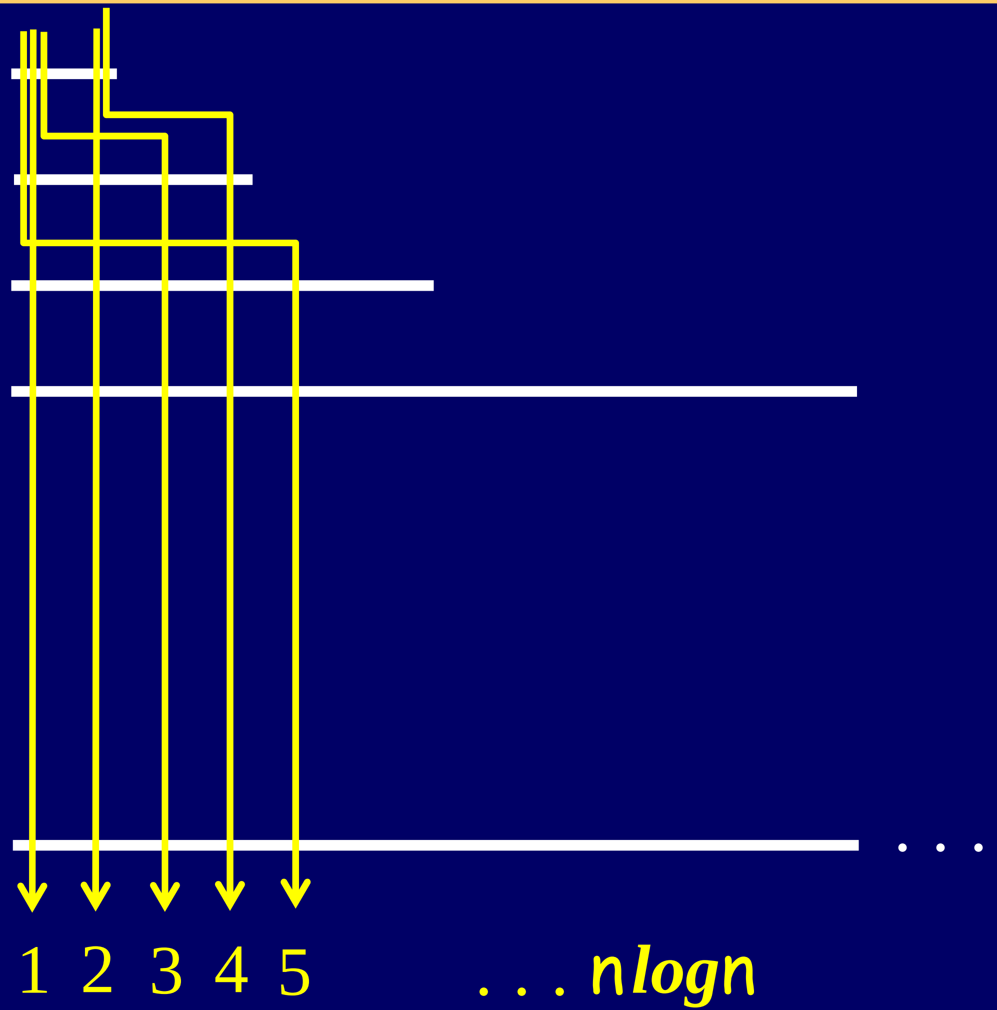
$$x\left(\frac{1}{w+1}\right)\left(1-\frac{1}{w+1}\right)^{x-1}\left(1-\frac{1}{w+1}\right)^{y} \ge \frac{1}{32}$$

Η πιθανότητα η οικογένεια S να μην είναι w-selector είναι το πολύ:

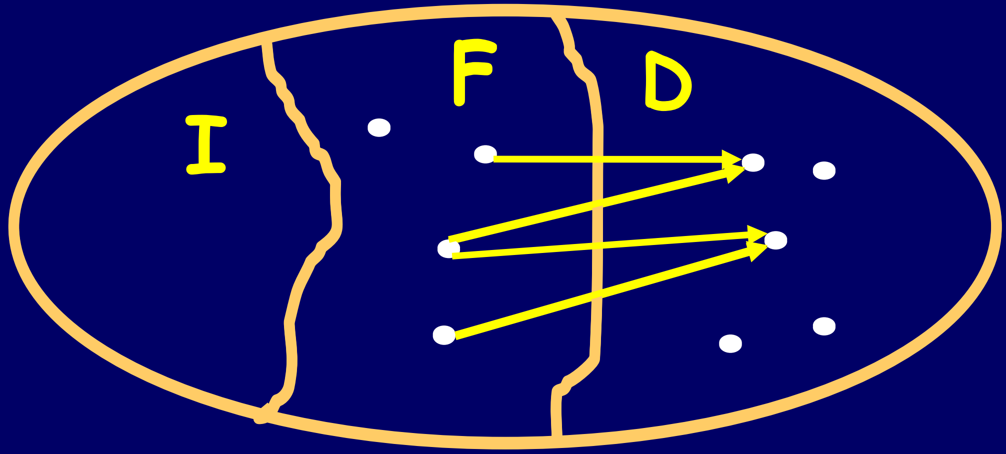
$$\sum_{x=w/2}^{w}\binom{n}{x}\sum_{y=0}^{w}\binom{n}{y}\left(\frac{31}{32}\right)^{m} < 1$$

Ο αλγόριθμος **DoBroadcast**

j	m_j	S_j	selector
0	$\log n$		1
1	$2\log n$		2
2	$4\log n$		4
3	$8\log n$		8
$\log n$	$n\log n$		n



O($n\log n$) στάδια αρκούν



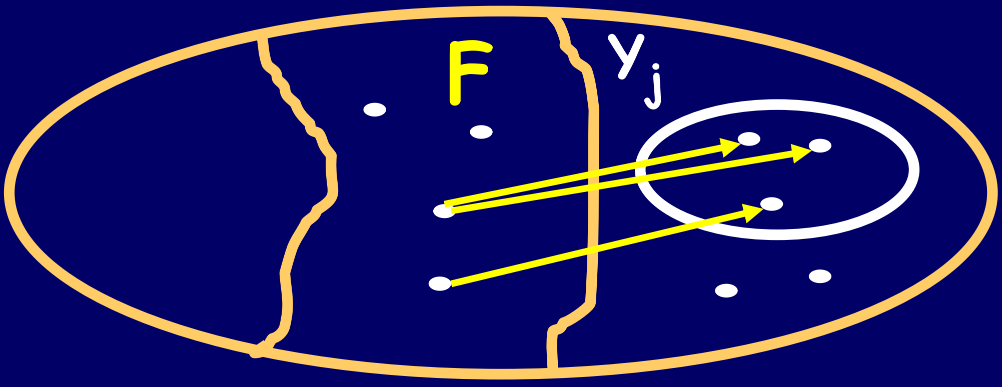
Πρόοδος:

άγνοια (dormant)→
μετωπικοί (frontier) →
εσωτερικοί (inner)

Η συνολική πρόοδος είναι $2n-1$ και μπορεί να επιτευχθεί σε $O(n\log n)$ στάδια.

Αποσβετική (amortized) ανάλυση: σε κάποιο βάθος χρόνου, θα έχει συντελεστεί πρόοδος $\Omega(1/\log n)$ και άρα για το $2n-1$ αρκούν $O(n\log n)$ στάδια.

Σκελετός απόδειξης (i)

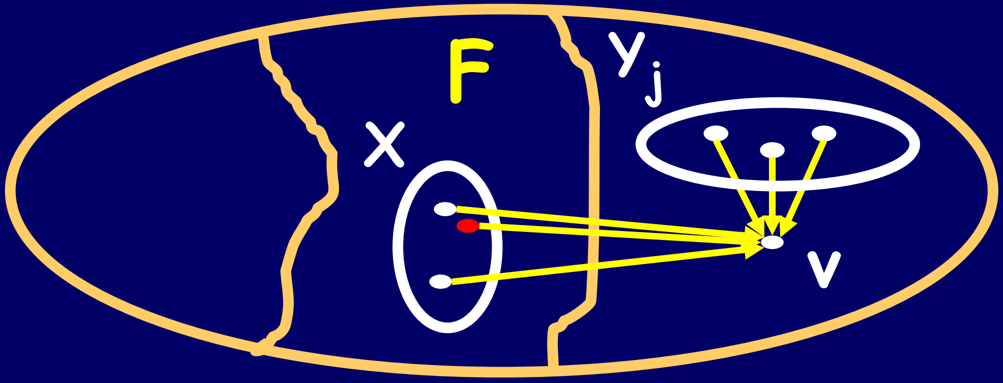


j	m_j	S_j	selector
0	*logn*		1
1	2 *logn*		2
2	4 *logn*		4
3	8 *logn*		8
logn	n *logn*	. . .	n

1 2 3 4 5 . . . n *logn*

Έστω F το σύνολο των μετωπικών κόμβων στην αρχή του σταδίου s, και Y_j το σύνολο των κόμβων που πήραν για πρώτη φορά το μήνυμα μεταξύ σταδίου s και σταδίου $s+m_j-1$ (δηλ. σε $O(2^j \log n)$ στάδια).

Σκελετός απόδειξης (ii)



Είτε κάποιο Y_j είναι αρκετά μεγάλο ($|Y_j| \geq 2^j$), που σημαίνει ότι αρκετοί νέοι κόμβοι πήραν το μήνυμα σε $O(2^j \log n)$ στάδια,

j	m_j	S_j	selector
0	$\log n$		1
1	$2 \log n$		2
2	$4 \log n$		4
3	$8 \log n$		8
$\log n$	$n \log n$	. . .	n

1 2 3 4 5 . . . $n \log n$

είτε για κάθε Y_j ισχύει $|Y_j| < 2^j$, οπότε κάθε κόμβος v με γείτονες X στο F λαμβάνει το μήνυμα σε $|X| \log n$ στάδια. Επομένως όλοι οι μετωπικοί κόμβοι γίνονται εσωτερικοί, μετά από $|F| \log n$ στάδια.

Gossiping

Παρατήρηση: Ο αλγόριθμος DoBroadcast—που μόλις είδαμε—δεν κάνει και Gossip, σε αντίθεση με τον RoundRobin.

Η ιδέα είναι οι κόμβοι να μην εκπέμπουν πριν μαζέψουν αρκετά μηνύματα, οπότε και τα στέλνουν όλα σε ένα βήμα. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται περιττές συγκρούσεις.

Ο αλγόριθμος **DoGossip**

1η Φάση:

Εκτέλεσε $\sqrt{B(n)}\ \log n$ στάδια του RoundRobin;

2η Φάση:

Repeat

→ Βρες τον κόμβο u_{max} με το μεγαλύτερο αποθηκευμένο μήνυμα $K(u_{max})$;

→ DoBroadcast με πηγή τον u_{max};

→ Για κάθε κόμβο u: $K(u) := K(u) \setminus K(u_{max})$;

Until $K(u_{max}) = 0$;

back

Στη 2η φάση αρκούν $n/\sqrt{B(n)}$ επαναλήψεις

Μετά την 1η φάση, κάθε μήνυμα μεταδόθηκε σε τουλάχιστον $\sqrt{B(n)}\log n$ κόμβους.

Συνεπώς, κάθε ένα από τα n μηνύματα έχει $\sqrt{B(n)}\log n$ αποθηκευμένα αντίγραφα. Όλα μαζί τα αποθηκευμένα μηνύματα είναι τουλάχιστον $n\sqrt{B(n)}\log n$.

Τελικά—μετά την 1η φάση—
$K(u_{max}) \geq \sqrt{B(n)}\log n$.

Στη $2^η$ φάση αρκούν $n/\sqrt{B(n)}$ επαναλήψεις

$1^ο$ βήμα $2^{ης}$ φάσης: Τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ
$n-K(u_{max}) = n(1-\sqrt{B(n)}\log n/n) = n(1-a)$

$2^ο$ βήμα $2^{ης}$ φάσης: Όμοια με προηγουμένως υπολογίζουμε ότι $K(u_{max}) = (1-a)\sqrt{B(n)}\log n$
και άρα τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ $n(1-a)-K(u_{max}) = n(1-a)^2$

$\vdots$

$i^{οστο}$ βήμα $2^{ης}$ φάσης: Τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ $n(1-a)^i$

Πώς υπολογίζουμε τα $\mathbf{u_{max}}$ και $\mathbf{K(u_{max})}$;

Με Binary Search στο [0,n]:

B(n)*logn*

→ a := 0; b := n;

Repeat

→ c := [½(a+b)];

→ DoBroadcast με πηγή κάθε κόμβο u με $c \leq K(u) \leq b$ και μήνυμα [c,b];

→ Εάν μετά από χρόνο B(n) έχουν λάβει το μήνυμα, θέτουν a := c, αλλιώς b := c-1;

Until a = b;

return a;

Πώς υπολογίζουμε τα $\mathbf{u_{max}}$ και $\mathbf{K(u_{max})}$;

Με Binary Search στο [0,n]:

→ a := 0; b := n;

B(n)*logn*

Repeat

- → c := [½(a+b)];
- → DoBroadcast με πηγή κάθε κόμβο u με $K(u) = K(u_{max})$ και $c \le u \le b$ και μήνυμα [c,b];
- → Εάν μετά από χρόνο B(n) έχουν λάβει το μήνυμα, θέτουν a := c, αλλιώς b := c-1;

Until a = b;

return a;

DoGossip

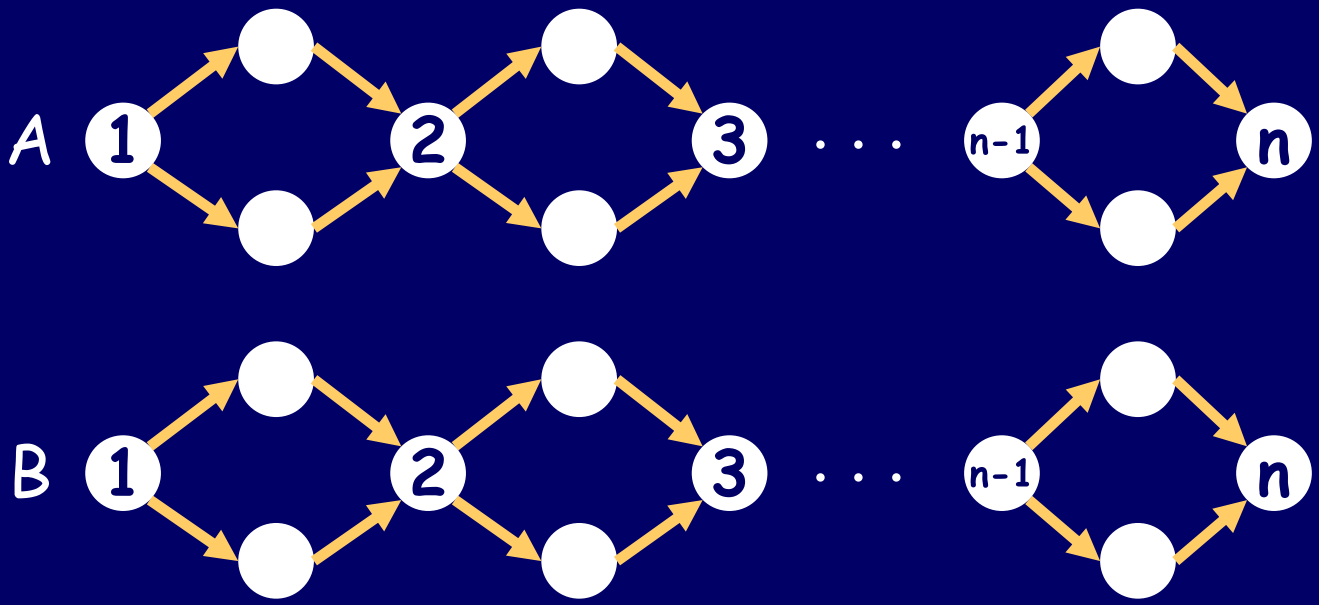
Αποτελέσματα

Θεώρημα: Ο αλγόριθμος DoBroadcast επιτυγχάνει μετάδοση σε $O(n\log^2 n)$.

Θεώρημα: Χρησιμοποιώντας αλγόριθμο για broadcast πολυπλοκότητας $B(n)$, μπορούμε να επιτύχουμε gossiping σε $O(n\sqrt{B(n)}\log n)$ βήματα.

Θεώρημα: Υπάρχει αλγόριθμος που επιτυγχάνει gossiping σε $O(n^{1.5}\log^2 n)$ βήματα.

$\Omega(n\,log\,n)$ Lower bound



	$1\ 2\ \ldots\ lg[2(n-1)-1]$
1	0 1 1 0 0 0 1 . . . 1 0
2	0 1 0 0 1 0 1 . . . 1 0
•	
•	
•	
2(n-1)	1 1 0 0 1 0 0 . . . 0 1

$lg[2(n-1)-1]$ +

$lg[2(n-3)-1]$ +

.
.
.

$1 = \Theta(n\,lg\,n)$