Scheduling on Unrelated Parallel Machines

Problem Formulation

- Given a set *J* of jobs, a set *M* of machines, and for each $j \in J$ and $i \in M$, $p_{ij} \in \mathbf{Z}^+$, is the time taken to process job *j* on machine *i*, the problem is to schedule the jobs on the machines so as to minimize the *makespan*, i.e., the maximum processing time of any machine.
- We denote the number of jobs by *n* and the number of machines by *m*

The machines are unrelated→ Δεν υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των χρόνων εκτέλεσης μιας εργασίας σε διαφορετικές μηχανές

- *Some special cases: identical machines and uniform machines admit a PTAS*

- Identical Machines→ Κάθε εργασία απαιτεί τον ίδιο χρόνο επεξεργασίας σε κάθε μηχανή
- Uniform Machines→ Ο χρόνος επεξεργασίας μιας εργασίας j σε μια μηχανή i is pij = pj/si όπου si είναι the ταχύτητα επεξεργασίας της μηχανής i

Τεχνικές Γραμμικού Προγραμματισμού για προσεγγιστικές λύσεις

- LP – Rounding → μετατροπή της “fractional” (ρητής) λύσης σε ακέραια προσπαθώντας να μην απέχει πολύ η ακέραια από τη “fractional” (ρητή).
- Parametric Pruning

Διατύπωση προβλήματος ως ένα Γραμμικό Πρόγραμμα

- Click to edit Master text styles
  - Second level
    - Third level
      - Fourth level
        - Fifth level

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && t \\
&\text{subject to} && \sum_{i \in M} x_{ij} = 1, && j \in J \\
& && \sum_{j \in J} x_{ij} p_{ij} \le t, && i \in M \\
& && x_{ij} \in \{0,1\}, && i \in M,\ j \in J
\end{aligned}$$

Κάθε εργασία ανατίθεται σε μια μηχανή.

Ο χρόνος επεξεργασίας μιας μηχανής δεν ξεπερνά το t.

Xij→ είναι οι μεταβλητές κατάδειξης του ΓΠ (δείχνουν αν η εργασία j έχει ανατεθεί στη μηχανή i)

Μη φραγμένο “integrality gap”

- Παράδειγμα 17.2

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια εργασία με χρόνο εκτέλεσης m σε κάθεμια από τις m μηχανές. Οπότε το makespan είναι m.

- Αν λύσουμε το γενικευμένο ΓΠ ($0 \le x_{ij} \le 1$) προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση είναι η ανάθεση σε βαθμό 1/m της εργασίας αυτής σε κάθε μηχανή. Οπότε η βέλτιστη λύση είναι 1 και το integrality gap είναι m. (unbounded)
- Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό μπορούμε να εισάγουμε ένα επιπλέον περιορισμό $\forall i \in M, j \in J : \text{if } p_{ij} > t \text{ then } x_{ij} = 0$

Αυτός όμως δεν είναι γραμμικός περιορισμός.

Χρησιμοποιώντας parametric pruninig

$$S_T = \{(i,j) \mid p_{ij} \leq T\}$$

- Click to edit Master text styles
  - Second level
  - Third level
    - Fourth level
      - Fifth level

$$\sum_{i:(i,j)\in S_T} x_{ij} = 1, \qquad j \in J \qquad (1)$$

$$\sum_{j:(i,j)\in S_T} x_{ij}p_{ij} \leq T, \qquad i \in M \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (i,j) \in S_T \qquad (3)$$

Για κάθε τιμή της παραμέτρου T αναζητούμε μια εφικτή ρητή λύση του γραμμικού προγράμματος όπου το makespan να είναι μικρότερο ή ίσο του T. (makespan ≤ T)

Ελάχιστη τιμή του T

- Βρίσκοντας με δυαδική αναζήτηση την ελάχιστη τιμή του T για την οποία το γραμμικό πρόγραμμα έχει μια εθικτή ρητή λύση αποκτούμε κι ένα κάτω φράγμα για τη βέλτιστη λύση του ακέραιου προβλήματος. (αν όχι, τότε θα υπήρχε και μικρότερη τιμή για το T)
- Στην πραγματικότητα η λύση αυτή δεν απέχει πολύ από τη βέλτιστη αφού υπάρχει αλγόριθμός 2-προσεγγιστικός αξιοποιώντας τη λύση αυτή κάνοντας LP-rounding.

Ιδιότητες ακραίων λύσεων του ΓΠ

Λήμμα 17.3

- Κάθε ακραία λύση του LP(T) αποτελείται από το πολύ n+m μη μηδενικές μεταβλητές. (n: αριθμός εργασιών, m: αριθμός μηχανών)

Αποδ.

- Έστω r = |ST|ο αριθμός των μεταβλητών στις οποίες ορίζεται το LP(T). Μια εθικτή λύση για το LP(T) είναι ακραία λύση ανν εξισώνονται r γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί του LP(T). Τουλάχιστον r-(n+m) επιλέγονται από το 3ο είδος περιορισμών. Επομένως τουλάχιστον r-(n+m) μεταβλητές τίθενται ίσες με το μηδέν. Άρα μια ακραία λύση έχει το πολύ n+m μη μηδενικές μεταβλητές.

Ιδιότητες ακραίων λύσεων του ΓΠ

- Σε κάθε ακραία λύση τουλάχιστον n-m εργασίες (integrally set) απασχολούν εξ’ ολοκλήρου μια μηχανή, η καθεμιά τους.

  Αποδ.

Έστω ότι α και β είναι ο αριθμός των εργασιών οι οποίες τίθενται integrally και fractionally σε κάποιες μηχανές. Για τις fractionally set εργασίες απασχολούν 2 ή παραπάνω μηχανές. Οπότε $\alpha + \beta = n$ και $\alpha + 2\beta \leq n + m$. Άρα $\beta \leq m$ και $a \geq n - m$.

Ορισμός Γράφου για το ΓΠ

- G = (J,M,E) ένας διμερής γράφος στο J *U* M όπου (i,j) είναι ακμή του E ανν xij ≠0. Αν F είναι οι fractionally set jobs τότε H είναι ο υπογράφος του G ορισμένος στο F U M. Μια αντιστοίχιση στον H καλείται ως τέλεια εάν αντιστοιχίζει κάθε εργασία που ανήκει στο F σε μια μηχανή που ανήκει στο M.

- (i,j) είναι ακμή του γράφου H ανν 0< Xij< 1

Αλγόριθμος 2-προσεγγιστικός

Algorithm 17.5 (Scheduling on unrelated parallel machines)

1. By a binary search in the interval $[\alpha/m, \alpha]$, find the smallest value of $T \in \mathbf{Z}^+$ for which $\mathrm{LP}(T)$ has a feasible solution. Let this value be T^*.
2. Find an extreme point solution, say x, to $\mathrm{LP}(T^*)$.
3. Assign all integrally set jobs to machines as in x.
4. Construct graph H and find a perfect matching $\mathcal{M}$ in it (e.g., using the procedure of Lemma 17.7).
5. Assign fractionally set jobs to machines according to matching $\mathcal{M}$.

α→ είναι το makespan του greedy schedule όπου κάθε εργασία επιλέγει τη μηχανή στην οποία εκτελείται συντομότερα

Ο γράφος G είναι pseudo-forest

- Ένας συνδεδεμένος γράφος στο V είναι ψευδο-δέντρο αν έχει το πολύ |V| ακμές. Ψευδο-δάσος→κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι ψευδο-δέντρο.

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός των ακμών του G σε κάθε του συνεκτική συνιστώσα είναι το πολύ |V|.

Θεωρούμε μια συνεκτική συνιστώσα Gc. Περιορίζουμε το LP(T) στις εργασίες και τις μηχανές της Gc κι έτσι ορίζουμε το LPc(T) με την λύση Xc. Έστω ότι Xc(συμπλ.) αφορά τις υπόλοιπες μεταβλητές του X.

Παρατηρούμε ότι το Xc είναι κι αυτό ακραία λύση στο LPc(T).

Εάν δεν ίσχυε το παραπάνω τότε το Xc θα ήταν κυρτός συνδυασμός 2 εθικτών λύσεων του LPc(T). Καθεμιά από αυτές μαζί με το Xc (συμπλ.) συγκροτούν μια εθικτή λύση για το LP(T). Επομένως το X είναι κυρτός συνδυασμός 2 εθικτών λύσεων για το LP(T) που οδηγεί σε άτοπο.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 17.3, το Gc έχει το πολύ n+m μη μηδενικές μεταβλητές (ακμές στο γράφο Gc), επόμένως είναι ένα ψευδο-δέντρο.

Λήμμα 17.7

- Ο γράφος H έχει μια τέλεια αντιστοίχιση.

Απόδ.

Κάθε εργασία που είναι integrally set έχει ακριβώς μια προσπίπτουσα ακμή στο γράφο G. Αν αφαιρέσουμε αυτές τις ακμές μαζί με τις αντίστοιχες εργασίες προκύπτει ο γράφος H που ορίζεται πάνω στις fractionally set εργασίες.

Ο γράφος H είναι επίσης pseudo-forest. (αφού αφαιρέσαμε ίδιο αριθμό ακμών και κόμβων από το G.)

- Στον H κάθε εργασία έχει βαθμό το λιγότερο 2. Έτσι όλα τα φύλλα του H είναι μηχανές. Αν συνεχίσουμε να αντιστοιχίζουμε τα εναπομείναντα φύλλα με τις προσπίπτουσες εργασίες και να τα αφαιρούμε από το γράφο (φύλλα κι αντίστοιχες εργασίες) τότε τελικά θα μείνει ένας γράφος που θα αποτελείται από άρτιους κύκλους (αφού ξεκινήσαμε από ένα διμερή γράφο).
- Ταιριάζουμε εναλλάξ τις ακμές του κύκλου κι έχουμε μια τέλεια αντιστοίχιση για το H.

Απόδειξη για το λόγο προσέγγισης

- Έστω ότι X είναι μια βέλτιστη ακραία λύση για το LP(T*). Τότε το makespan(X) ≤ T* ≤ OPT.
- Αν περιοριστούμε στις εργασίες που είναι integrally set στις μηχανές τότε το makespan (Xint) ≤ T*. Για κάθε ακμή του H ισχύει ότι pij ≤T*
- Η τέλεια αντιστοίχιση στο H αναθέτει το πολύ μια επιπλέον εργασία σε κάθε μηχανή. Συνεπώς makespan (X) ≤T*+max(pij)≤ 2T* ≤ 2OPT.