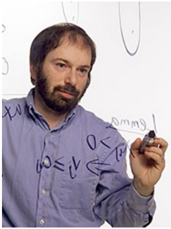
# Improving Christofides' Algorithm for the s-t Path TSP

Hyung Chan An, Robert Kleinberg, David B. Shmoys

Καλογερόπουλος Παναγιώτης (ΜΠΛΑ)

# Χριστοφίδης Παναγιώτης

# Συγγραφείς



Hyung Chan An | Robert Kleinberg | David B. Shmoys

# Το πρόβλημα

**input :**

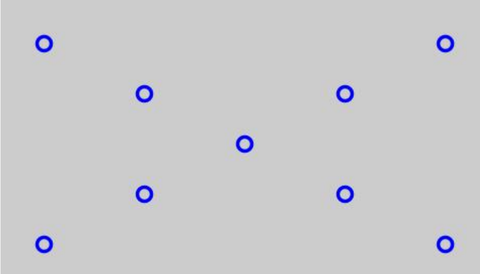
- $G = (V, E)$ πλήρες γράφημα.
- Συνάρτηση $c : E \to \mathbb{R}_+$ που καθορίζει το κόστος κάθε ακμής. Η συνάρτηση $c$ (η οποία μπορεί απλά να θεωρηθεί και ως ένα διάνυσμα στον χώρο $\mathbb{R}_+^{|E|}$) ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.
- Δύο κορυφές του γραφήματος $s, t$.

**output :**

- Μονοπάτι ελάχιστου κόστους που να ξεκινά από την κορυφή $s$, να διέρχεται από όλες τις (εσωτερικές) κορυφές του γραφήματος και να καταλήγει στην $t$.

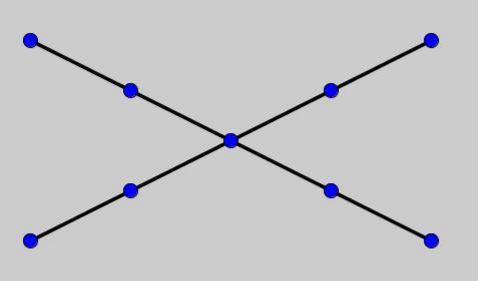
# Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Θα περιγράψουμε συνοπτικά τον αλγόριθμο του Χριστοφίδη. Θεωρούμε το ακόλουθο (πλήρες!) γράφημα:



# Αλγόριθμος Χριστοφίδη

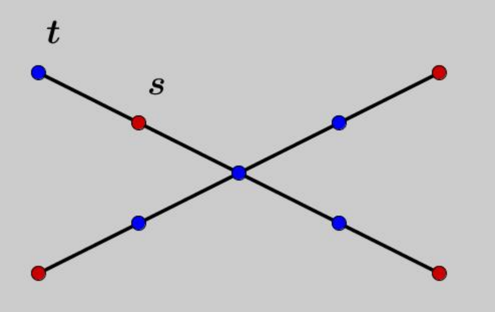
Βρίσκουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $\mathcal{T}_{min}$ του γραφήματος (έστω το ακόλουθο):



# Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Έστω $T$ το σύνολο των κορυφών του γραφήματος που έχουν «λάθος» βαθμό. Δηλαδή,

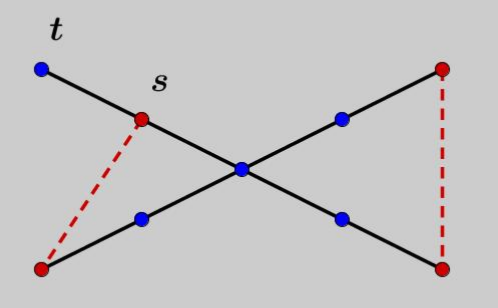
- Η αρχική κορυφή $s$ ή η τελική κορυφή $t$ αν έχουν άρτιο βαθμό.
- Οι εσωτερικές κορυφές αν έχουν περιττό βαθμό.



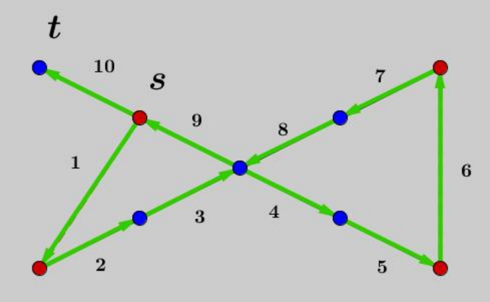
# Αλγόριθμος Χριστοφίδη

**Ορισμός**
Για $T \subset V$ το $J \subset E$ είναι ( T-join ) ταίριασμα αν το σύνολο των κορυφών περιττού βαθμού στο γράφημα $G' = (V, J)$ είναι $T$.

Βρίσκουμε ένα ελάχιστο T-join , $J$.

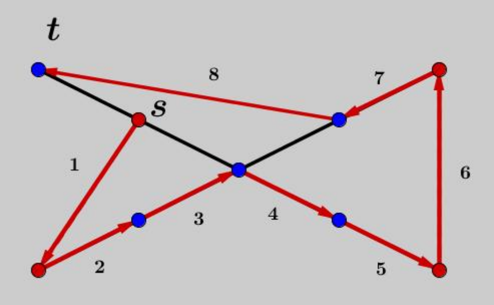


Βρίσκουμε ένα s-t μονοπάτι Euler στο γράφημα $\mathcal{T}_{min} \cup J$.



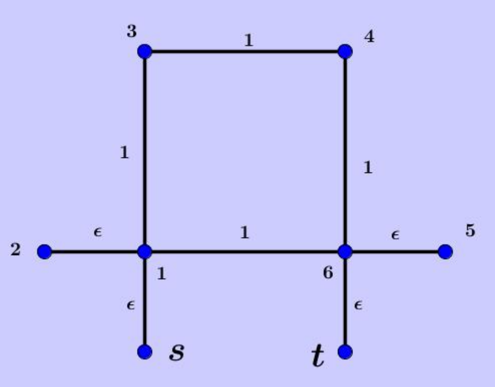
# Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Με shortcutting παίρνουμε s-t μονοπάτι Hamilton .



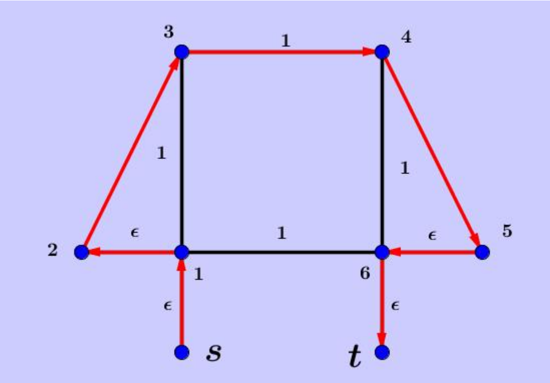
# Hoogeven

Ο Hoogeven απέδειξε ότ αλγόριθμος του Χριστοφίδη είναι προσεγγιστικός με λόγο $\frac{5}{3} \approx 1,666$.
Απέδειξε επίσης χρησιμοποιώντας το ακόλουθο γράφημα ότι το φράγμα αυτό είναι αυστηρό.
$0 < \epsilon << 1$.



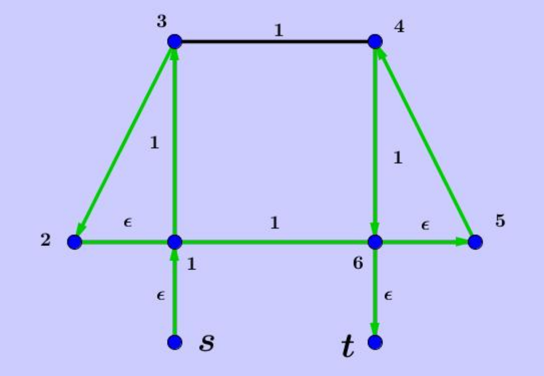
# Hoogeven

Η ιδανική διαδρομή είναι η ακόλουθη με κόστος $3 + 6\epsilon$.



# Hoogeven

Το μονοπάτι που θα προκύψει εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Χριστοφίδη θα είναι το ακόλουθο με κόστος $5 + 6\epsilon$.

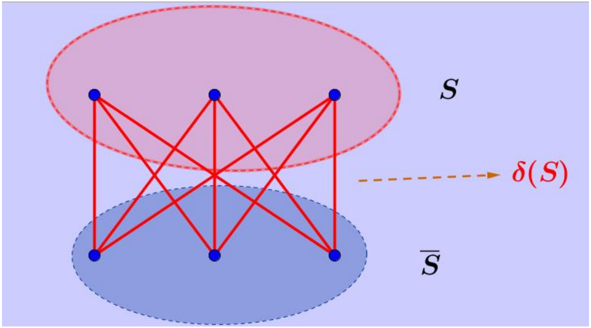



Για $\epsilon \to 0$ $\qquad \frac{5+6\epsilon}{3+6\epsilon} \to \frac{5}{3}$.

## Μερικοί Συμβολισμοί

1. $\delta(S)$.

Για $S \subset V$ το $\delta(S)$ δηλώνει το σύνολο των ακμών στην τομή $(S, \overline{S})$.



# Μερικοί Συμβολισμοί

2. Για $x, y \in \mathbb{R}_+^{|E|}$ και $F \subset E$

$$x(y) = \sum_{e \in E} x_e y_e$$

$$x(F) = \sum_{f \in F} x_f$$

3. incidence vector

$$(x_F)_e = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad e \in F \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

# Path Variant Held Karp relaxation

**Συνάρτηση Κόστους**

Έστω $e_1, e_2, ..., e_n$ οι ακμές του γραφήματος $G = (V, E)$. Τότε η συνάρτηση κόστους $c : E \to \mathbb{R}_+$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}_+^n$. Δηλαδή $c = (c_1, ..., c_n)$ όπου $c_i$ το κόστος της ακμής $e_i$.

**Μονοπάτι ως διάνυσμα**

Έστω μονοπάτι $P$. Το μονοπάτι αυτό μπορεί επίσης να περιγραφεί με τον εξής τρόπο από ένα διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}_+^n$.
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με $x_i = 1$ αν η ακμή $e_i$ ανήκει στο μονοπάτι $P$ και
$x_i = 0$ διαφορετικά.

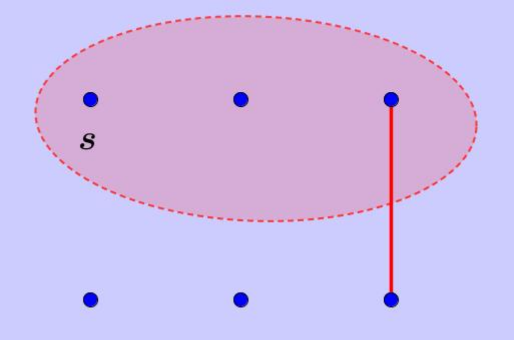
**Ζητούμενο**

Το ζητούμενο είναι να βρούμε $x$ που να ελαχιστοποιεί το $c(x)$.

# Περιορισμοί

**1ος Περιορισμός**

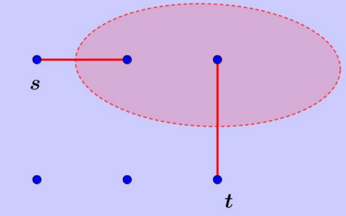
Πρέπει $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 \qquad \forall S \subset V, \, |\{s,t\} \cap S| = 1.$

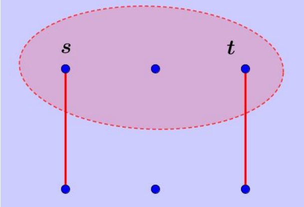


# Περιορισμοί

**2ος Περιορισμός**

Πρέπει $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \qquad \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| \neq 1, S \neq \emptyset.$

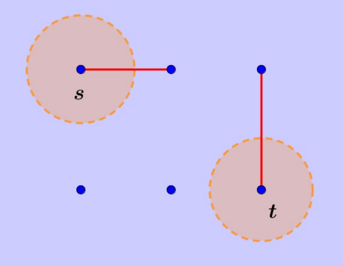


# Περιορισμοί

**3ος Περιορισμός**

Πρέπει $\sum_{e \in \delta(\{s\})} x_e = \sum_{e \in \delta(\{t\})} x_e = 1.$



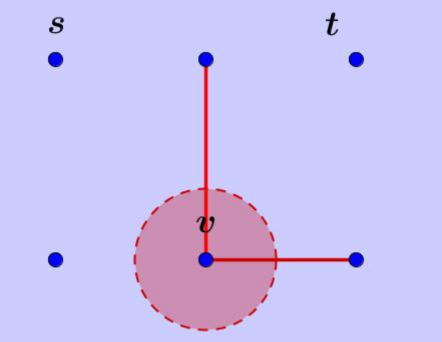

**4ος Περιορισμός**

Πρέπει $0 \leq x_e \qquad \forall e \in E.$

# Περιορισμοί

**5ος Περιορισμός**

Πρέπει $\sum_{e\in\delta(\{v\})} x_e = 2 \qquad \forall v \in V / \{s,t\}$



# Ένα Γραμμικό Σύστημα

minimize $c(x)$

subject to:

$$\begin{cases} \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1, & \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| = 1 \\ \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2, & \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| \neq 1, S \neq \emptyset \\ \sum_{e\in\delta(\{s\})} x_e = \sum_{e\in\delta(\{t\})} x_e = 1 & \\ 0 \leq x_e & \\ \sum_{e\in\delta(\{v\})} x_e = 2, & \forall v \in V / \{s,t\} \end{cases}$$

# Συμπέρασμα

Προκύπτει συνεπώς ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο:

1. Λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ( Grotschel, Lovasz, Schrijver ).
2. Η λύση $x^*$ μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός των incidence vectors των Ελάχιστων Συνδετικών Δέντρων ( Grotschel, Lovasz, Schrijver ). Δηλαδή υπάρχουν ΕΣΔ $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$, όπου το $k$ είναι φραγμένο πολυωνυμικά και $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{\mathcal{T}_i}$ και $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$
3. Μία τέτοια ανάλυση (ως άθροισμα ΕΣΔ) μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο.

# Best of many Christofides Algorithm

1. Υπολόγισε μια βέλτιστη λύση $x^*$ του συστήματος που περιγράψαμε.
2. Γράψε την λύση $x^*$ ως κυρτό συνδυασμό των incidence vectors των Ελάχιστων Συνδετικών Δέντρων $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$.
3. Για κάθε ΕΣΔ $\mathcal{T}_i$ κάνε ότι και στον αλγόριθμο του Χριστοφίδη.
4. Το καλύτερο μονοπάτι Hamilton είναι το αποτέλεσμα του αλγόριθμου.

Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος προσεγγίζει την βέλτιστη λύση με λόγο $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$. Βελτίωση $1,666 - 1,618 = 0,048$.