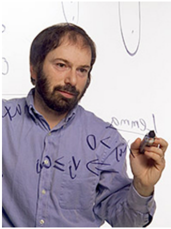
Improving Christofides' Algorithm for the s-t Path TSP

Hyung Chan An, Robert Kleinberg, David B. Shmoys

Καλογερόπουλος Παναγιώτης (ΜΠΛΑ)

Χριστοφίδης Παναγιώτης

Συγγραφείς



Hyung Chan An | Robert Kleinberg | David B. Shmoys

Το πρόβλημα

input :

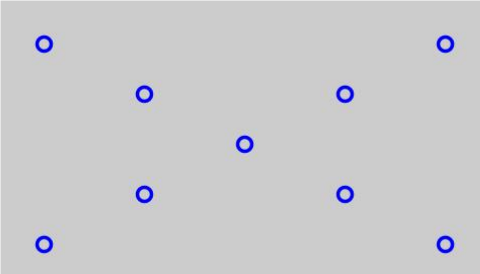
- $G = (V, E)$ πλήρες γράφημα.
- Συνάρτηση $c : E \to \mathbb{R}_+$ που καθορίζει το κόστος κάθε ακμής. Η συνάρτηση c (η οποία μπορεί απλά να θεωρηθεί και ως ένα διάνυσμα στον χώρο $\mathbb{R}_+^{|E|}$) ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.
- Δύο κορυφές του γραφήματος s, t.

output :

- Μονοπάτι ελάχιστου κόστους που να ξεκινά από την κορυφή s, να διέρχεται από όλες τις (εσωτερικές) κορυφές του γραφήματος και να καταλήγει στην t.

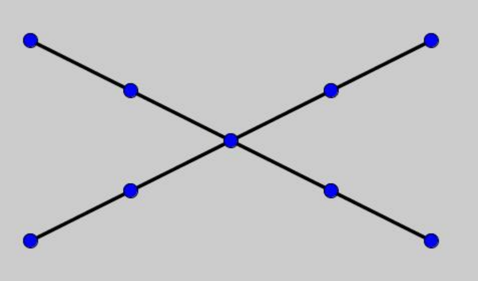
Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Θα περιγράψουμε συνοπτικά τον αλγόριθμο του Χριστοφίδη. Θεωρούμε το ακόλουθο (πλήρες!) γράφημα:



Αλγόριθμος Χριστοφίδη

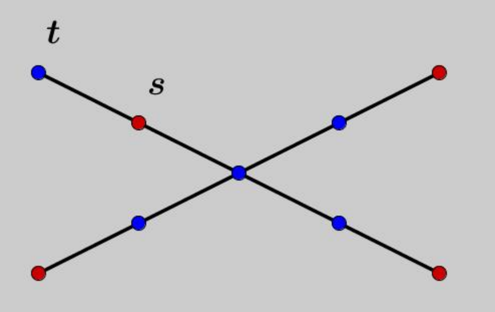
Βρίσκουμε ένα Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο $\mathcal{T}_{min}$ του γραφήματος (έστω το ακόλουθο):



Αλγόριθμος Χριστοφίδη

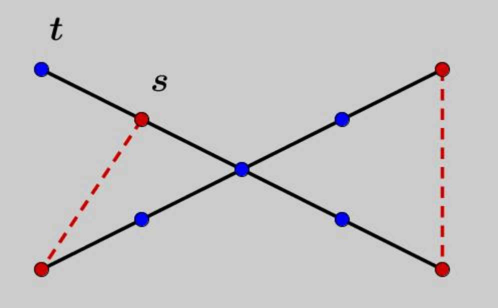
Έστω T το σύνολο των κορυφών του γραφήματος που έχουν «λάθος» βαθμό. Δηλαδή,

- Η αρχική κορυφή s ή η τελική κορυφή t αν έχουν άρτιο βαθμό.
- Οι εσωτερικές κορυφές αν έχουν περιττό βαθμό.



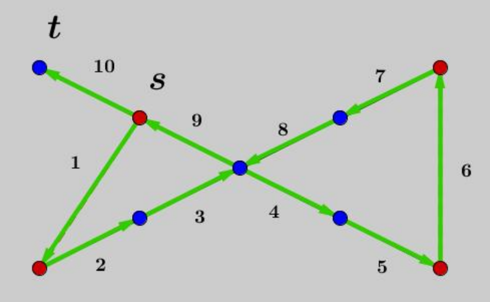
Ορισμός
Για $T \subset V$ το $J \subset E$ είναι (T-join) ταίριασμα αν το σύνολο των κορυφών περιττού βαθμού στο γράφημα $G' = (V, J)$ είναι T.

Βρίσκουμε ένα ελάχιστο T-join , J.



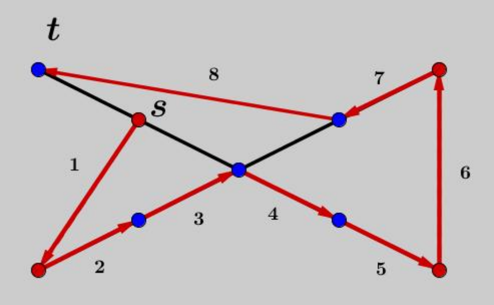
Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Βρίσκουμε ένα s-t μονοπάτι Euler στο γράφημα $\mathcal{T}_{min} \cup J$.



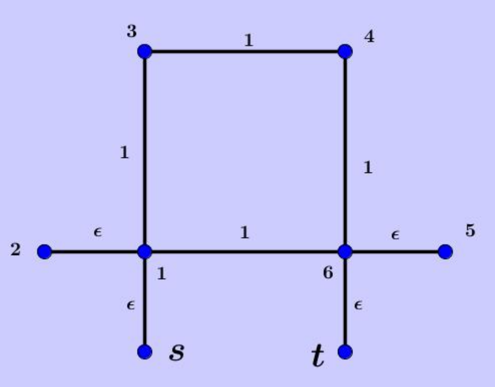
Αλγόριθμος Χριστοφίδη

Με shortcutting παίρνουμε s-t μονοπάτι Hamilton .



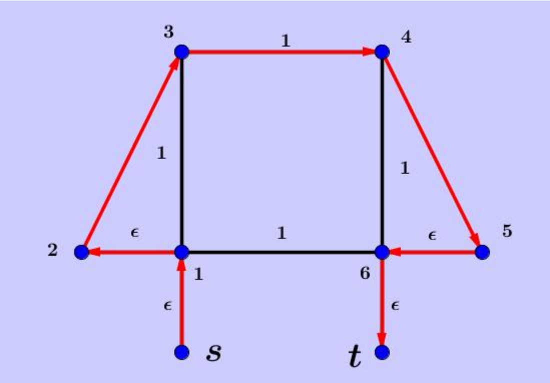
Hoogeven

O Hoogeven απέδειξε ότ αλγόριθμος του Χριστοφίδη είναι προσεγγιστικός με λόγο $\frac{5}{3} \approx 1,666$.
Απέδειξε επίσης χρησιμοποιώντας το ακόλουθο γράφημα ότι το φράγμα αυτό είναι αυστηρό.
$0 < \epsilon << 1$.



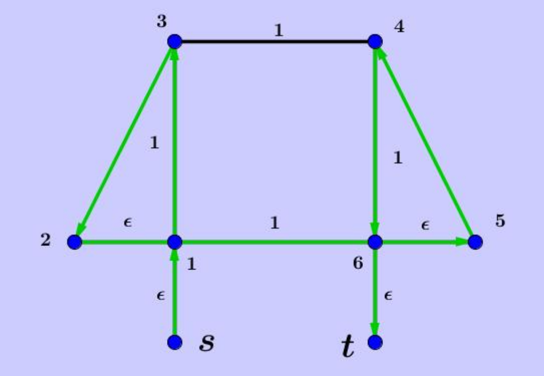
Hoogeven

Η ιδανική διαδρομή είναι η ακόλουθη με κόστος $3 + 6\epsilon$.



Hoogeven

Το μονοπάτι που θα προκύψει εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Χριστοφίδη θα είναι το ακόλουθο με κόστος $5 + 6\epsilon$.

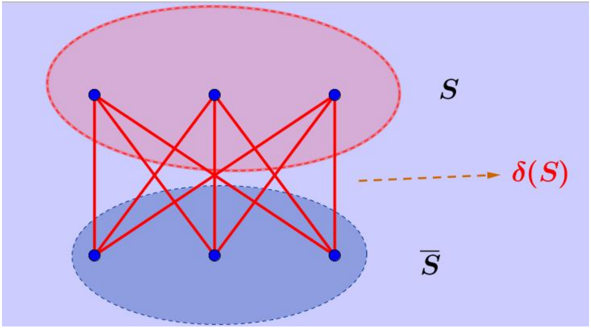


Για $\epsilon \to 0$ $\qquad \frac{5+6\epsilon}{3+6\epsilon} \to \frac{5}{3}$.

Μερικοί Συμβολισμοί

1. $\delta(S)$.

Για $S \subset V$ το $\delta(S)$ δηλώνει το σύνολο των ακμών στην τομή $(S, \overline{S})$.



Μερικοί Συμβολισμοί

2. Για $x, y \in \mathbb{R}_+^{|E|}$ και $F \subset E$

$$x(y) = \sum_{e \in E} x_e y_e$$

$$x(F) = \sum_{f \in F} x_f$$

3. incidence vector

$$(x_F)_e = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad e \in F \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Path Variant Held Karp relaxation

Συνάρτηση Κόστους

Έστω $e_1, e_2, ..., e_n$ οι ακμές του γραφήματος $G = (V, E)$. Τότε η συνάρτηση κόστους $c : E \to \mathbb{R}_+$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^n_+$. Δηλαδή $c = (c_1, ..., c_n)$ όπου c_i το κόστος της ακμής e_i.

Μονοπάτι ως διάνυσμα

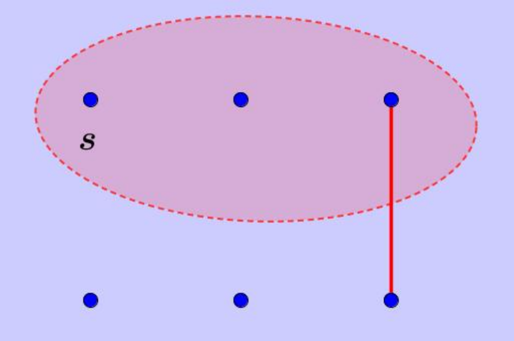
Έστω μονοπάτι P. Το μονοπάτι αυτό μπορεί επίσης να περιγραφεί με τον εξής τρόπο από ένα διάνυσμα του χώρου $\mathbb{R}^n_+$.
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ με $x_i = 1$ αν η ακμή e_i ανήκει στο μονοπάτι P και $x_i = 0$ διαφορετικά.

Ζητούμενο

Το ζητούμενο είναι να βρούμε x που να ελαχιστοποιεί το $c(x)$.

1$^{\text{ος}}$ Περιορισμός

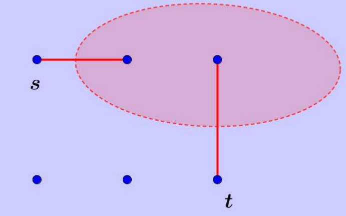
Πρέπει $\sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1 \qquad \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| = 1.$

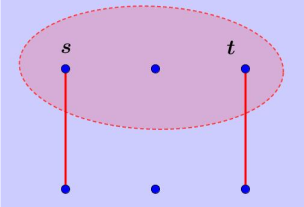


Περιορισμοί

2$^{\text{ος}}$ Περιορισμός

Πρέπει $\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \qquad \forall S \subset V, \, |\{s,t\} \cap S| \neq 1, \, S \neq \emptyset.$

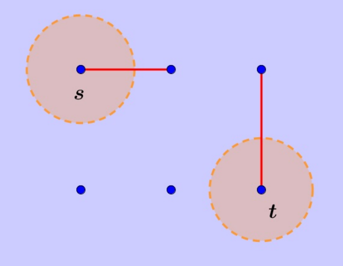




Περιορισμοί

$3^{ος}$ Περιορισμός

Πρέπει $\sum_{e\in\delta(\{s\})} x_e = \sum_{e\in\delta(\{t\})} x_e = 1$.



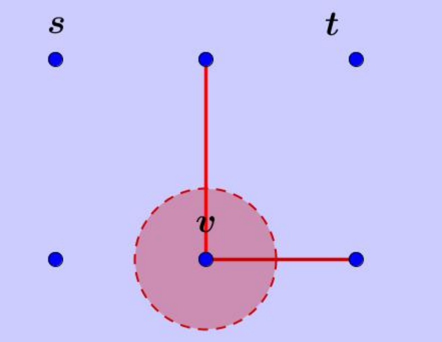
$4^{ος}$ Περιορισμός

Πρέπει $0 \leq x_e \qquad \forall e \in E$.

Περιορισμοί

$5^{ος}$ Περιορισμός

Πρέπει $\sum_{e \in \delta(\{v\})} x_e = 2 \qquad \forall v \in V / \{s, t\}$



Ένα Γραμμικό Σύστημα

minimize $c(x)$

subject to:

$$\begin{cases} \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1, & \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| = 1 \\ \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 2, & \forall S \subset V, |\{s,t\} \cap S| \neq 1, S \neq \emptyset \\ \sum_{e\in\delta(\{s\})} x_e = \sum_{e\in\delta(\{t\})} x_e = 1 & \\ 0 \leq x_e & \\ \sum_{e\in\delta(\{v\})} x_e = 2, & \forall v \in V / \{s,t\} \end{cases}$$

Συμπέρασμα

Προκύπτει συνεπώς ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού το οποίο:

1. Λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο (Grotschel, Lovasz, Schrijver).
2. Η λύση x^* μπορεί να γραφτεί ως κυρτός συνδυασμός των incidence vectors των Ελάχιστων Συνδετικών Δέντρων (Grotschel, Lovasz, Schrijver). Δηλαδή υπάρχουν ΕΣΔ $\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_k$, όπου το k είναι φραγμένο πολυωνυμικά και $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{\mathcal{T}_i}$ και $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$
3. Μία τέτοια ανάλυση (ως άθροισμα ΕΣΔ) μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Best of many Christofides Algorithm

1. Υπολόγισε μια βέλτιστη λύση x^* του συστήματος που περιγράψαμε.
2. Γράψε την λύση x^* ως κυρτό συνδυασμό των incidence vectors των Ελάχιστων Συνδετικών Δέντρων $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k$.
3. Για κάθε ΕΣΔ $\mathcal{T}_i$ κάνε ότι και στον αλγόριθμο του Χριστοφίδη.
4. Το καλύτερο μονοπάτι Hamilton είναι το αποτέλεσμα του αλγόριθμου.

Αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος προσεγγίζει την βέλτιστη λύση με λόγο $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$. Βελτίωση $1,666 - 1,618 = 0,048$.

καλοκαίρι!

Καλό Καλοκαίρι!