A New Approximation Algorithm for the *k*-Facility Location Problem

Peng Zang

Παρουσίαση: Στρατογιάννης Γεώργιος

k-facility location problem

- Το πρόβλημα του k-facility location είναι μια γενίκευση των προβλημάτων του facility location και του k-median
- Για τη μετρική του uncapacitated k-facility location(*k*-UFL) προβλήματος προτείνεται από τον Zhang ένα πολυωνυμικού χρόνου $2 + \sqrt{3} + \varepsilon$-προσεγγιστικός αλγόριθμος με τη χρήση της local search προσέγγισης που βελτιώνει σημαντικά τον ήδη γνωστό λόγο προσέγγισης 4 που έχει δοθεί από τον Jain με τη χρήση της greedy μεθόδου

1.1 Βάθος του προβλήματος

- Το UFL και το *k*-median είναι **NP**-hard.
- Από προηγούμενη έρευνα των Mahdian, Ye και Zhang ο βέλτιστος προσεγγιστικός λόγος για το UFL είναι 1.52 [13]
- Οι Guha και Khuller έδειξαν ότι το UFL δεν μπορεί να προσεγγιστεί εντός του 1.463 λόγω του ότι:

$$NP \nsubseteq DTIME\left(n^{O(\log\log n)}\right)$$

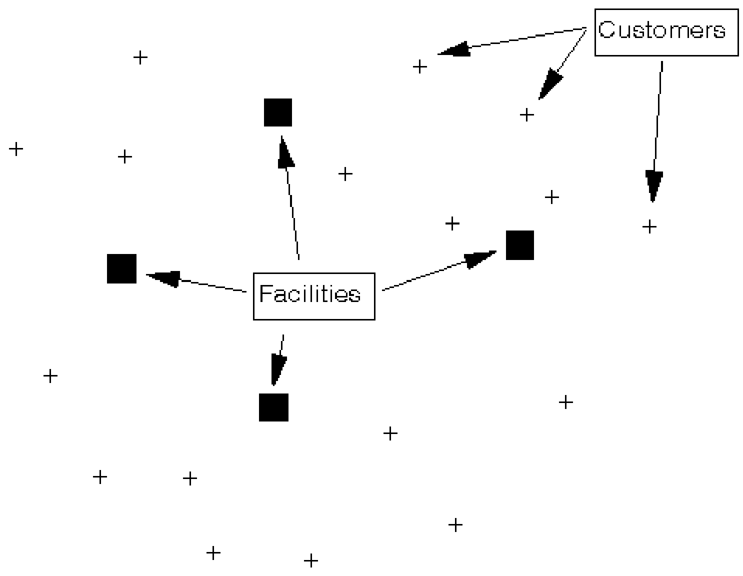
- Οι Jain, Mahdian και Saberi έδωσαν δυσκολία: $1+\frac{2}{e}\geq 1.735$ για τον *k*-median

facility location

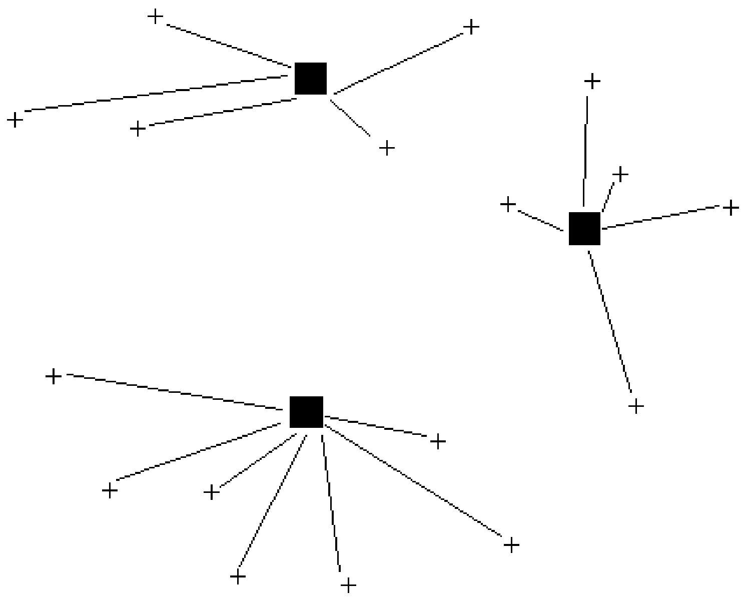
- Το γενικό πρόβλημα του facility location είναι το εξής:
- Δίνεται ένα σύνολο facility location και ένα σύνολο από customers οι οποίοι εξυπηρετούνται από τα facilities, τότε:
    - Ποια facilities πρέπει να χρησιμοποιηθούν
    - Ποιοι customers πρέπει να εξυπηρετηθούν από τα facilities που θα χρησιμοποιηθούν για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος εξυπηρέτησης όλων των customers
- Συνήθως εδώ τα facilities θεωρούνται ως «ανοιχτά» (χρησιμοποιείται για να εξυπηρετήσει τουλάχιστον έναν πελάτη) ή «κλειστά» και υπάρχει ένα σταθερό κόστος, το οποίο υφίσταται εάν το facility είναι ανοιχτό. Ποια facilities έχουν ανοίξει και ποια είναι κλειστά είναι απόφασή μας.

facility location (γραφική παράσταση)

Εδώ φαίνεται η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος



Μια πιθανή λύση φαίνεται παρακάτω



k-median

- Το πρόβλημα του k-median είναι μια παραλλαγή του uncapacitated facility location(UFL) προβλήματος, με τη διαφορά ότι αντί του κόστους για κάθε facility, έχουμε ένα όριο *k* στον αριθμό των facilities.
- Έτσι: έχοντας ένα σύνολο locations V, ένα σύνολο F από facilities μια συνάρτηση κόστους $C:(V \cup F)*(V \cup F) \to Q^{+}$ μεταξύ των δύο locations και μια παράμετρο εισόδου k, $0 < k < |F|$, το k-median πρόβλημα είναι η εύρεση ενός υποσυνόλου $\sigma : V \to F^{'}$ και $F^{'} \subseteq F$ ώστε
  - $|F| = k$
  - Το μέγιστο κόστος $i \in V, \sum_{i \in V} C_{i\sigma(i)}$ είναι ελάχιστο

1.2 Definition of *k*-UFL

- Σύνολο F facilities
- Σύνολο C πόλεων
- Υποδηλώνεται το $|F|$ ως n_f και το $|C|$ ως n_c
- Για κάθε facility i δίνεται ένα opening cost $f_i \in Q^+$
- Υπάρχει κόστος σύνδεσης $c_{ij} \in Q^+$ για κάθε ζεύγος facility i και πόλης j
- Όλα τα κόστη σύνδεσης είναι συμμετρικά και ισχύει η τριγωνική ανισότητα
- Δίνεται ένας ακέραιος k
- Στόχος είναι να ανοίξουν το πολύ k facilities που δηλώνονται από ένα σύνολο $S \subseteq F$ και να συνδεθεί κάθε πόλη σε ένα facility στο S ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος
- Η $\phi_s : C \rightarrow S$ χρησιμοποιείται για να δείξει τη σχέση σύνδεσης μεταξύ των C και S (πχ το $\phi_s(j) = i$ σημαίνει ότι η πόλη j συνδέεται με το facility i κάτω από τη λύση S)

Total cost of solution S

- Το συνολικό κόστος της λύσης S είναι:

$$\cos t(S) = \cos t_f(S) + \cos t_s(S)$$

Όπου $\cos t_f(S) = \sum_{i \in S} f_i$ το facility κόστος του S και
$\cos t_s(S) = \sum_{j \in C} c_{\phi_S(j)j}$ το κόστος εξυπηρέτησης του S

1.3 Our Results

- Εδώ προτείνεται ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το k-UFL χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της τοπικής αναζήτησης με προσεγγιστικό λόγο $2+\sqrt{3}+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon>0$
- Επεκτείνεται ο αλγόριθμος για κάποιες παραλλαγές του k-UFL
- Πειραματικά αποτελέσματα του αλγορίθμου σε παραδείγματα αναφοράς δείχνουν ότι ο αλγόριθμος έχει καλή επίδοση στην πράξη

2.1 Local search approach

- Η local search approach είναι μια καλή μέθοδος για την αντιμετώπιση **NP**-hard βελτιστοποίησης προβλήματα
- Η local search προσέγγιση είναι η εξής:
- Βρίσκουμε μια αρχική εφικτή λύση στο πρόβλημα
- Βρίσκουμε μια βελτιωμένη λύση S'στη γειτονία N(S) του S όπου το N(S) είναι ένα σύνολο από λύσεις που φθάνουμε μέσα από μια τοπική πράξη
- Για τη νέα λύση επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρις ότου να μην υπάρχει κάποια νέα λύση στο N(S)
- Η νέα λύση καλείται τοπική βέλτιστη λύση

Τοπικές πράξεις

- Για το k-UFL ορίζονται οι εξής τρεις τοπικές πράξεις.

1. *add(i)*: ένα facility $i \in F - S$ προστίθεται στην τωρινή λύση S παρέχοντας ότι $|S| < k$
2. *drop(i)*: ένα facility $i \in S$ αφαιρείται
3. *swap(A,B)*: όλα τα facilities στο $A \subseteq S$ αφαιρούνται από το S και ένα σύνολο από facilities $B \subseteq F$ προστίθεται στο S

- Με βάση τις παραπάνω πράξεις η γειτονιά της λύσης S ορίζεται ως:

$$N(S) = \{S + i : i \in F - S\} \cup \{S - i : i \in S\} \cup$$
$$\{S - A + B : A \subseteq S \wedge B \subseteq F \wedge |A| = |B| \leq p\}$$

όπου *το* $S+i$ υποδηλώνει το $S+\{i\}$

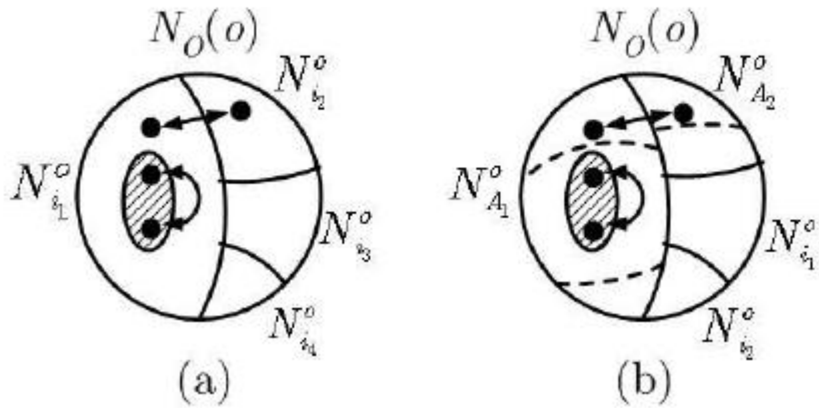
2.2 Analysis of Locality Gap

- Ας υποθέσουμε ότι για ένα k-UFL παράδειγμα π.χ. I, η τοπική βέλτιστη λύση $S = \{i_1, i_2, \cdots, i_l\}$, και η global βέλτιστη λύση $O = \{o_1, o_2, \cdots, o_r\}$. Δεδομένου ότι η S είναι το τοπικό βέλτιστο, δεν υπάρχει καμία τοπική πράξη που βελτιώνει το S.
- Εκτιμούμε το locality gap μέσα από την αξιοποίηση αυτής της ιδιότητας. Η ανάλυσή μας βασίζεται σε αυτό του k-median και UFL προβλήματα που έδωσαν οι Aria et al [1]. Πρώτα παρουσιάζονται κάποιοι συμβολισμοί που ορίζονται στο [1].

2.2 Analysis of Locality Gap

- Αν U είναι μια αυθαίρετη λύση στο I.
- N_U (i) = {j∈C: φ_U (i) = i} η γειτονιά για το facility i∈U,
- $N_U(A) = \cup_{i \in A} N_U(i)$ η γειτονιά για υποσύνολο A ⊆ U.
- $c_{\phi_U(j)j}$ Για πόλη j, υποδηλώνουν κόστος εξυπηρέτησης από U_j.
- Το facility i∈S «συλλαμβάνει» o ∈ O εάν |NS(i)∩ NS(o)|> $1/2$ |N_O(o) |.
- Αν το i συλλαμβάνει κάποια o, τότε καλείται «κακό», αλλιώς «καλό».
- Η έκφραση N_S(i)∩N_O(o) είναι σε συντομογραφία N_i^o όταν S και O είναι γνωστά από το συγκεκριμένο πλαίσιο.
- Η γειτονιά N_O(o) χωρίζεται σε πολλά μέρη από την εν λόγω facilities i που $N_i^o \neq 0$, και έτσι είναι $N_S(i)$
- l

Analysis of Locality Gap



- Αφού κάθε facility o εγκλωβίζεται από το πολύ ένα facility στο S έχουμε 1-1 αντιστοίχιση στο $\pi(j) \in N_S(i)$ (a)
- Αν το i δεν εγκλωβίζει το o τότε $\pi(N_i^o) \cap N_i^o$ αλλιώς για όλα τα $j \in N_i^o$ έχουμε $\pi(\pi(j))=j$ αν $\pi(j) \in N_S(i)$
- Οι έννοιες του εγκλωβισμού και του mapping μπορούν να επεκταθούν και σε ένα υποσύνολο $A \subseteq S$

$$\pi : N_O(o) \rightarrow N_O(o)$$

Λήμμα 1

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $o \in O$ facility $i \in S$ όπου το $N_i^o \neq 0$ αφαιρείται από το S. Αν το i δεν περιέχει το o, τότε για κάθε $j \in N_i^o$ το νέο κόστος εξυπηρέτησης του j φράσσεται από το $O_j + O_{\pi(j)} + S_{\pi(j)}$

Λήμμα 2

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $o \in O$ το υποσύνολο όπου το $A \subseteq S$ που $N_A^o \neq 0$ αφαιρείται από το S. Αν το A δεν περιέχει το o, τότε για κάθε $j \in N_i^o$ το νέο κόστος εξυπηρέτησης του j φράσσεται από το $O_j + O_{\rho(j)} + S_{\rho(j)}$

Λήμμα 3

- Έστω η πράξη $swap(i,o)$, όπου $o \in O$ είναι το κοντινότερο *facility* που υπάρχει το i. Στη συνέχεια για οποιαδήποτε άλλο $o^{'} \neq O$ που έχει το i και για κάθε $j \in N_i^{o^{'}}$ τέτοιο ώστε $\pi(j) \in N_S(i)$, το νέο κόστος του j να οριοθετείται από το $2S_j + O_j$

Λήμμα 4 (Οριοθέτηση του facility κόστους του S)

$$\cos t_f(S) \leq \cos t_f(O) + 2\cos t_S(O)$$

Λήμμα 5 (Οριοθέτηση του κόστους εξυπηρέτησης του S)

- Ισχύει ότι: $\cos t_s(S) \leq \cos t_f(O) + \left(3 + \frac{2}{p}\right) \cos t_s(O)$

Θεώρημα 1

- Η τοπική αναζήτηση του ευρετικού για το k-UFL με τρεις προκαθορισμένες τοπικές πράξεις έχει locality gap το πολύ $5+\frac{2}{p}$, όπου το p είναι ο μέγιστος αριθμός από facilities που εναλλάσσονται μεταξύ του S και του F σε μια πράξη *swap*

2.3 Improving the Locality Gap

- Από τη στιγμή που η ανάλυση του λήμματος 4 και 5 παίρνουν μόνο το πλεονέκτημα του τοπικού βέλτιστου του S, ισχύουν μόνο για αυθαίρετες εφικτές λύσεις U του αυθαίρετου παραδείγματος I του k-UFL που είναι:

$$\forall I, \forall U, \cos t_f(I,S) \le \cos t_f(I,U) + 2\cos t_s(I,U),$$

$$\cos t_f(I,S) \le \cos t_f(I,U) + \left(3 + \frac{2}{p}\right)\cos t_s(I,U)$$

Θεώρημα 2

- Με τη χρήση της στάνταρ τεχνικής κλιμάκωσης το τοπικό ευρετικό αναζήτησης για το k-UFL με τις τρεις προκαθορισμένες τοπικές πράξεις έχει locality gap το πολύ:

$$2+\frac{1}{p}+\sqrt{3+\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2}}$$

Απόδειξη θεωρήματος 2 (1)

I. Αρχικά αυξάνουμε ομοιόμορφα το opening κόστος f_i για facility στο I σε δf_i, έχοντας σαν αποτέλεσμα ένα τροποποιημένο παράδειγμα I'.

II. Εκτελείται μια τοπική ευρετική αναζήτηση στο I', παίρνοντας μια τοπική βέλτιστη λύση S.

III. Παίρνουμε την έξοδο S ως λύση στο I.

IV. Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση O του I είναι και αυτή εφικτή λύση στο I', με:

$$\left.\begin{aligned} \cos t_f(I',O) &= \delta \cos t_f(I,O) \\ \cos t_s(I',O) &= \cos t_s(I,O) \end{aligned}\right\}$$

Λήμμα 4 και 5

$$\begin{cases} \cos t_f(I',S) \le \delta \cos t_f(I,O) + 2\cos t_s(I,O) \\ \cos t_s(I',S) \le \delta \cos t_f(I,O) + \left(3 + \dfrac{2}{p}\right)\cos t_s(I,O) \end{cases}$$

Απόδειξη θεωρήματος 2 (1)

V. Έτσι συνεπάγεται:

$$\cos t_f(I,S) = \cos t_f(I',S)/\delta \leq \cos t_f(I,O) + \frac{2}{\delta}\cos t_s(I,O)$$

$$\cos t_s(I,S) = \cos t_s(I',S) \leq \delta \cos t_f(I,O) + \left(3 + \frac{2}{p}\right)\cos t_s(I,O)$$

Θέτοντας $\delta = 1 + \frac{1}{p} + \sqrt{3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}}$ δίνει locality gap

$$2 + \frac{1}{p} + \sqrt{3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}}$$

3 Approximation Algorithm for *k*-UFL

- Ένα βασικό σημείο για την εφαρμογή της προσέγγισης τοπικής αναζήτησης είναι το πώς θα εγγυηθεί ότι ο αλγόριθμος η τελειώνει σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που προτείνεται στο [9] και [1], αντί να εκτελούνται τις τοπικές πράξεις, όταν το κόστος της τροποποιημένης λύσης είναι μικρότερο από εκείνο της τωρινής λύσης, έχουμε εισαγάγει ένα μικρό σφάλμα ε'>0 για να σταματήσει η διαδικασία αναζήτησης όταν δεν υπάρχει καμία τοπική πράξη που μπορεί να μειώσει το κόστος της τωρινής λύσης με ένα φράξιμο αυτού του λάθους.
- Αυτό δίνει τον αλγόριθμο A

3 Approximation Algorithm for *k*-UFL

- *Αλγόριθμος* A(p,ε')

1. Ομοιόμορφα αύξησε το ανοιγόμενο κόστος f_i ,για κάθε facility σε δf_i, όπου

$$\delta = 1 + \frac{1}{p} + \sqrt{3 + \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}}$$

2. $S \leftarrow$ Μια αυθαίρετη εφικτή λύση S_0 .
3. **while** $\exists S' \in N(S)$ τ.ω. $\cos t(S') \leq \left(1 - \frac{\varepsilon'}{n_f^2 + n_f}\right) \cos t(S)$ **do**
4. $S \leftarrow S'$
5. **endwhile**
6. Έξοδος S

Λήμμα 6: Ο προσεγγιστικός λόγος του αλγορίθμου *A*(*p*,*ε'*) είναι 2+ριζα3+ε για κάθε καθορισμένη σταθερά ε>0 όταν η σταθερά p είναι αρκετά μεγάλη

- *Απόδειξη:*
- Σύμφωνα με το βήμα 3 του αλγορίθμου A ο A εξάγει μια λύση S ικανοποιώντας ότι:

$$\forall S' \in N(S), \cos t(S') - \cos t(S) > \frac{\varepsilon'}{n_f^2 + n_f} \cos t(S)$$

όταν τελειώσει. Ο αριθμός των ανισοτήτων του τύπου $\cos t(S') - \cos t(S) \geq 0$ που χρησιμοποιήθηκε στο λήμμα 4 και 5, $p'(n_f)$ είναι το πολύ $n_f^2 + n_f$ άρα όταν παίρνουμε το locality gap του θεωρήματος 2 (έστω α)σημαίνει ότι:

$$a \cos t(O) - \cos t(S) > -\frac{p'(n_f)}{n_f^2 + n_f}$$

- $\varepsilon'' \cos t(S) \geq -\varepsilon'' \cos t(S)$ (Ο λογισμός στο θεώρημα 2 ότι όταν ο έλεγχος λάθους θεωρείται ότι παίρνοντας $\varepsilon'' = (2+\sqrt{6})\varepsilon'$ είναι αρκετό.

- Αυτό δίνει προσεγγιστικό λόγο της τάξης $a(1+2\varepsilon'') = (2+\sqrt{3}+\varepsilon)$ για κάθε σταθερά ε>0 όταν οι σταθερές p και ε' επιλέγονται αναλόγως

Λήμμα 7:

- Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου $A(p,\varepsilon')$ είναι $O\left(L \cdot n_c \cdot n_f^{2p+3}\right)$, όπου $L = \log \dfrac{\cos t\left(S_0\right)}{\cos t(O)}$

<u>*Απόδειξη:*</u>

- Ορίζουμε το $p\left(n_f\right)$ ως $n_f^2 + n_f$
- Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου A το κόστος της κάθε λύσης μειώνεται κλασματικά το λιγότερο $\varepsilon' / p\left(n_f\right)$

  και ο αριθμός των επαναλήψεων είναι το πολύ:

$$\log \frac{\cos t\left(S_0\right)}{\cos t(O)} / \log \frac{1}{1-\varepsilon' / p\left(n_f\right)} \leq L \cdot \frac{1}{\varepsilon' \log e} p\left(n_f\right)$$

- Σε κάθε επανάληψη η εύρεση μιας local πράξης παίρνει χρόνο $|N(S)| = O\left(n_f^{2p}\right)$ και ο υπολογισμός του κόστους $\cos t(S)$ παίρνει χρόνο $O\left(n_c n_f\right)$

Θεώρημα 3

- Με βάση τα λήμματα 6 και 7 οδηγούμαστε ότι ο αλγόριθμος A είναι ένας $2+\sqrt{3}+\varepsilon$-προσεγγιστικός αλγόριθμος που τρέχει σε χρόνο $O\left(L \cdot n_c \cdot n_f^{2p+3}\right)$ για τη μετρική του k-UFL προβλήματος

Αλγόριθμος B(p,ε')

- Κατά την εξέταση της εφαρμογής του αλγορίθμου A, είναι πολύ ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι, μολονότι η τεχνική της κλιμάκωσης θεωρητικά εγγυάται ένα βελτιωμένο προσεγγιστικό λόγο, μπορεί να οδηγήσει σε μια όχι καλή προσεγγιστική λύση στην περίπτωση που συνίσταται από πολλά facilities, δεδομένου ότι για το παράδειγμα της κλιμάκωσης, η τοπική ευρετική αναζήτηση μπορεί να βρει μια προσέγγιστική λύση με την οποία το κόστος εξυπηρέτησης αντισταθμίζει εν μέρει το επιπλέον facility κόστος.
- Έτσι ο αλγόριθμος *A* εφαρμόζεται για να καλέσει την τοπική ευρετική αναζήτηση δύο φορές, με μία τεχνική κλιμάκωσης να χρησιμοποιείται από την μια, και από την άλλη όχι, όπως φαίνεται στον αλγόριθμο *B*.

- *Αλγόριθμος B*(p,ε')

1. Κάλεσε τον αλγόριθμο *A*(p,ε') και πάρε μια προσεγγιστική λύση S_1
2. Κάλεσε την pure τοπική αναζήτηση με παραμέτρους (p,ε') παίρνοντας μια ακόμη προσεγγιστική λύση S_2
3. Εξήγαγε ως λύση το ελάχιστο κόστος μεταξύ της S_1 και S_2

4 Variants of the Problem

- Ο αλγόριθμος A ισχύει επίσης και σε διάφορες παραλλαγές του k-UFL.
  - Στην αυθαίρετη demand version του k-UFL, κάθε πόλη j έχει μια θετική ζήτηση d_j. Το κόστος της εξυπηρέτησης μιας μονάδας εξυπηρέτησης από ένα i facility σε μια j πόλη είναι c_{ij}.
  - Μόνο αλλάζοντας το κόστος εξυπηρέτησης της λύσης $\sum_{j \in C} c_{\phi(j)j} d_j$ ο αλγόριθμος δίνει $2 + \sqrt{3} +$ ε-προσέγγιση για αυτήν την παραλλαγή
  - Στην linear cost version του k-UFL (k-LinFL), αντί του opening κόστους f_i, ένα startup κόστος s_i και ένα στοιχειώδες t_i κόστος που προβλέπεται για κάθε μονάδα $i \in F$. Το νέο opening κόστος για τη σύνδεση $w>0$ πόλεων στο facility i είναι. Αφού το κόστος $s_i + wt_i$ αποτελεί και ένα μετρικό το k-LinFL μπορεί να μειωθεί στο k-UFL και να διατηρηθεί ο προσεγγιστικός λόγος

5 Discussion

- Ο νέος προσεγγιστικός αλγόριθμος που προτείνεται βασίζεται στη local search προσέγγιση για το k-UFL έχει προσεγγιστικό λόγο $2 + \sqrt{3} + \varepsilon$ για $\varepsilon > 0$.
- Αυτός είναι και ο βέλτιστος προσεγγιστικός αλγόριθμος που γνωρίζουμε για το k-UFL αλλά δεν γνωρίζουμε αν η ανάλυση είναι tight.
- Εάν ένας αλγόριθμος για κάθε λύση U για *k*-UFL π.χ. *I* εξόδους σε πολυωνυμικό χρόνο μια λύση των οποίων το κόστος δεν υπερβαίνει το $\gamma_f \cos t_f(U) + \gamma_s \cos t_s$ τότε αυτός ο αλγόριθμος είναι (γ_f, γ_s)-προσεγγιστικός αλγόριθμος .
- Όπως προκύπτει από [7] ότι *k*-UFL δεν μπορεί να προσεγγιστεί μεταξύ του $\left(1{,}1+\frac{2}{e}\right)$ αφού ισχύει ότι $NP \not\subseteq DTIME\left(n^{O(\log\log n)}\right)$
- Είναι $\left(2+\sqrt{3}+\varepsilon, 2+\sqrt{3}+\varepsilon\right)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το *k*-UFL
- <u>Άρα:</u>
  - υπάρχει μεγάλο χάσμα μεταξύ του προσεγγιστικού λόγου και τη γνωστή hardness προσέγγιση για k-UFL και,
  - δεδομένου ότι είναι ο καλύτερος σήμερα γνωστός προσεγγιστικός λόγος και hardness για το k-median που σήμερα είναι γνωστά είναι $(3+\varepsilon)$ και $\left(1+\frac{2}{e}\right)$ αντίστοιχα η μείωση του χάσματος του k-UFL στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στη μείωση k-median.

References (1)

- 1. Arya, V., Garg, N., Khandekar, R., Meyerson, A., Munagala, K., Pandit, V.: Local search heuristic for k-median and facility location problem. SIAM J. Comput. **33(2004) 544–562**
- 2. Beasley, J.: Operations research library, 2005 Available at http://people.brunel.ac.uk/mastjjb/jeb/orlib/uncapinfo.html
- 3. Charikar, M., Guha, S.: Improved combinatorial algorithms for the facility location and k-median problems. In Proceedings of the 40th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science. (1999) 378–388
- 4. Guha, S., Khuller, S.: Greedy strikes back: improved facility location algorithms. J. Algorithms **31 (1999) 228–248**
- 5. Hajiaghayi, M., Mahdian, M., Mirrokni, V.: The facility location problem with general cost functions. Networks **42 (2003)** 42–47
- 6. Jain, K., Mahdian, M., Markakis, E., Saberi, A., Vazirani, V.: Greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting with factor-revealing LP. J. ACM **50 (2003) 795–824**
- 7. Jain, K., Mahdian, M., Saberi, A.: A new greedy approach for facility location. In Proceedings of the 34th ACM Symposium on Theory of Computing. (2002) 731–740

References (2)

- 8. Jain, K., Vazirani, V.: Approximation algorithms for metric facility location and k-median problems using the primal-dual schema and lagrangian relaxation. J. ACM 48 (2001) 274–296
- 9. Korupolu, M., Plaxton, C., Rajaraman, R.: Analysis of a local search heuristic for facility location problems. J. Algorithms 37(2000) 146–188
- 10. Love, R., Morris, J., Wesolowsky, G.: Facilities location: models and methods. North Holland, New York. (1988)
- 11. Mirchandani, P., Francis, R. (editors): Discrete location theory. John Wiley and Sons, New York. (1990)
- 12. Mahdian, M., Markakis, E., Saberi, A., Vazirani, V.: A greedy facility location algorithms analyzed using dual fitting. In Proceedings of 5th International Workshop on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, LNCS 2129. (2001) 127–137
- 13. Mahdian, M., Ye, Y., Zhang, J.: Improved approximation algorithms for metric facility location problems. In Proceedings of the 5th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization. (2002) 229–242
- 14. Shmoys, D.: Approximation algorithms for facility location problems. In Proceedings of the 3th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization, LNCS 1913. (2000) 27–33