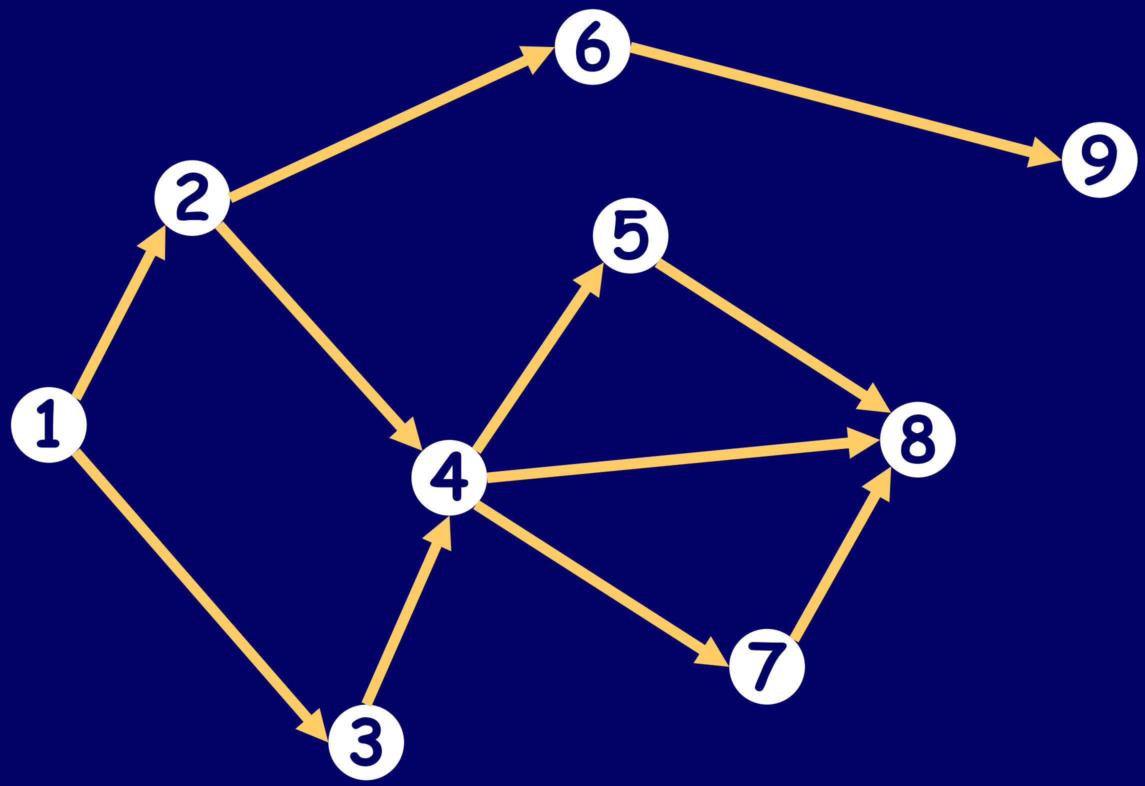
Fast broadcasting and gossiping in radio networks. Chrobak, Gasieniec, Rytter 2002.

Διδάσκων: Άρης Παγουρτζής
Παρουσίαση: Νίκος Λεονάρδος
nleon@cs.ntua.gr

Το μοντέλο



Broadcasting:
Ένας σε όλους

Gossiping:
Όλοι σε όλους

RoundRobin

Broadcasting
και gossiping
σε χρόνο $O(n^2)$

Stage 1:

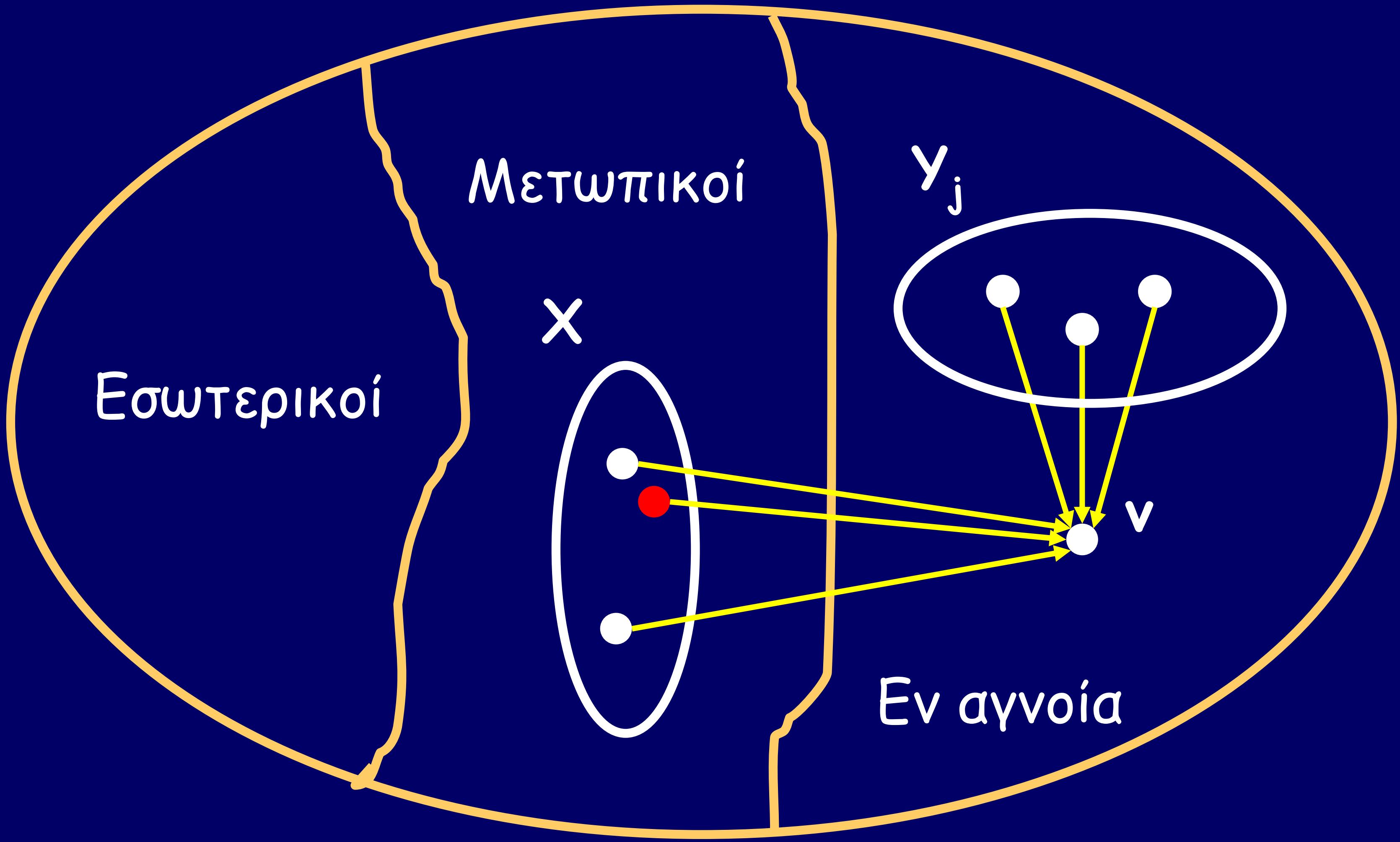
- Step 1: node 1 transmits
- Step 2: node 2 transmits
- …
- Step n: node n transmits

Stage 2:

- Step 1: node 1 transmits
- Step 2: node 2 transmits
- …
- Step n: node n transmits

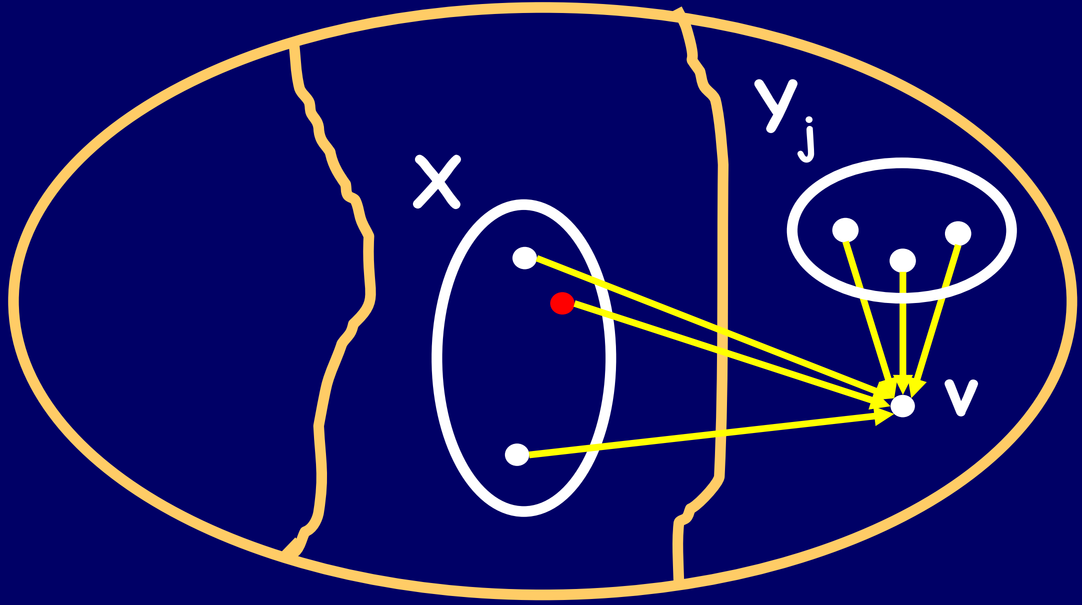
.
.
.

Μπορούμε καλύτερα;



Selectors

w-selector: Οικογένεια συνόλων S, τέτοια που «για κάθε δύο ξένα σύνολα X,Y με $w/2 \le |X| \le w$ και $|Y| \le w$, υπάρχει σύνολο στην S που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του X και κανένα του Y».



Υπάρχουν «μικροί» **selectors**

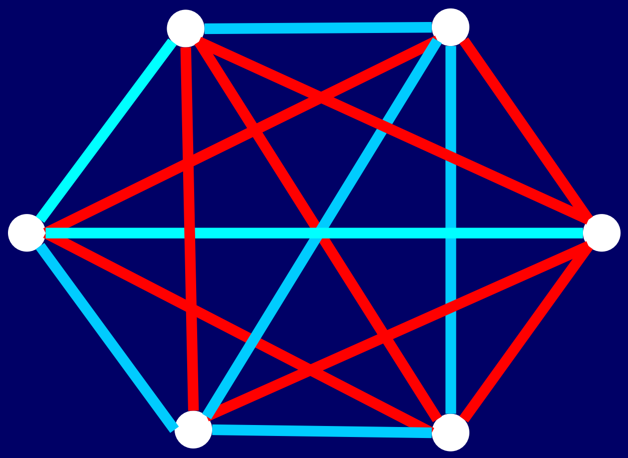
Λήμμα: Για κάθε n και $w \leq n$
υπάρχει ένας w-selector S
που περιέχει $O(w\log n)$ σύνολα.

Απόδειξη: Με την «probabilistic method»:

Για να δείξουμε ότι υπάρχουν (μικροί) selectors, κατασκευάζουμε μία οικογένεια S (μεγέθους $cw\log n$) με τυχαίο τρόπο και αποδεικνύουμε ότι με θετική πιθανότητα είναι w-selector!

Αριθμοί **Ramsey** και η **probabilistic method**

R(κ) := Ο ελάχιστος n, τέτοιος που κάθε 2-χρωματισμένος και πλήρης γράφος σε n κόμβους, περιέχει είτε μία κόκκινη, είτε μία μπλε κ-κλίκα.



R(3) = 6

Ένα θεώρημα του **Paul Erdös**

Θεώρημα: Για κάθε $\kappa \geq 3$, $R(\kappa) \geq 2^{\kappa/2}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι για $n \leq 2^{\kappa/2}$
υπάρχει γράφος, χωρίς κόκκινη ή μπλε κ-κλίκα.

Με πιθανότητα ½ βάφουμε μία ακμή με κόκκινο και
με πιθανότητα ½ με μπλε χρώμα.

Η πιθανότητα να υπάρχει μπλε κλίκα είναι το πολύ:

$$\binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{1}{2}$$

Η πιθανότητα να υπάρχει μπλε ή κόκκινη είναι αυστηρά
μικρότερη από $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Λήμμα: Για κάθε n και $w \le n$ υπάρχει w-selector S, που περιέχει $O(w \log n)$ σύνολα

Απόδειξη: Κατασκευάζουμε με τυχαίο τρόπο οικογένεια $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$.

Σε κάθε S_i εισάγουμε κάθε στοιχείο από το $\{1,2,\ldots,n\}$ με πιθανότητα $1/(w+1)$.

Για ξένα σύνολα X,Y με $w/2 \le |X| \le w$ και $|Y| \le w$, η πιθανότητα το S_i να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του X και κανένα του Y είναι:

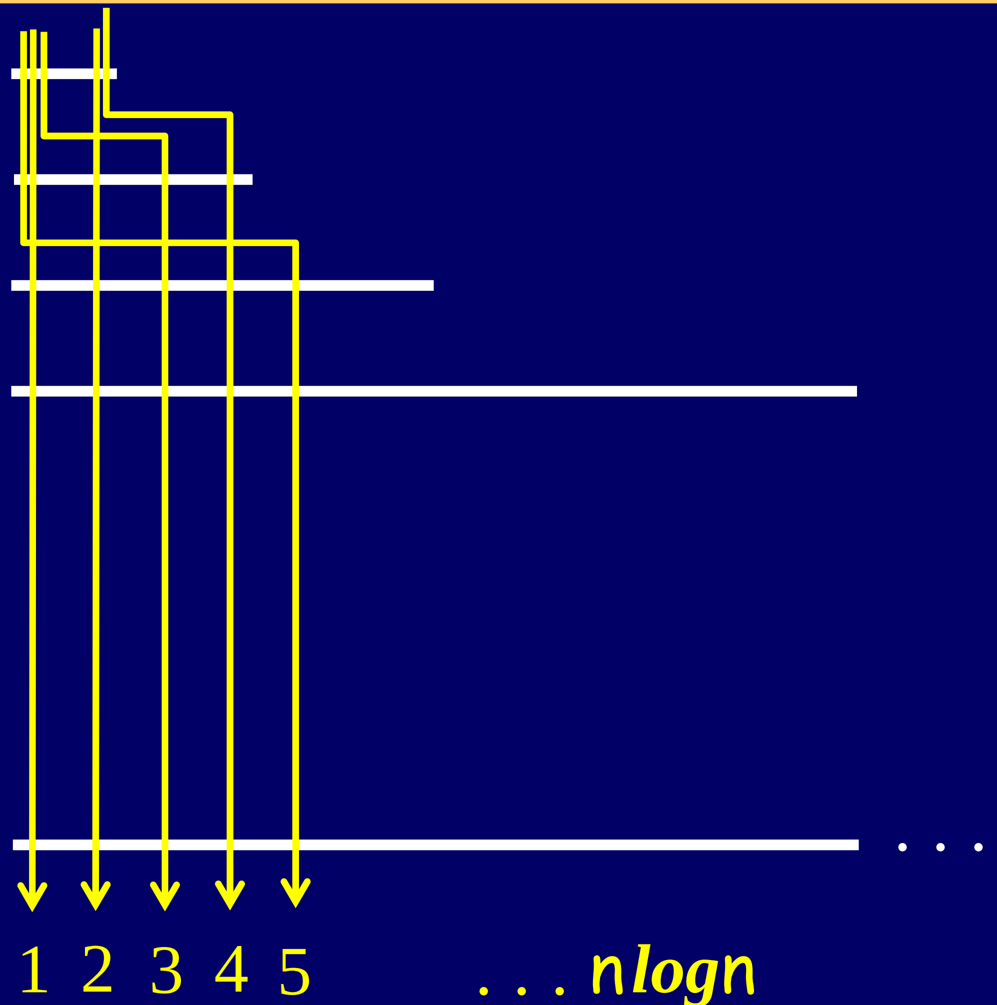
$$\mathbf{x}\left(\frac{1}{\mathbf{w}+1}\right)\left(1-\frac{1}{\mathbf{w}+1}\right)^{\mathbf{x}-1}\left(1-\frac{1}{\mathbf{w}+1}\right)^{\mathbf{y}} \ge \frac{1}{32}$$

Η πιθανότητα η οικογένεια S να μην είναι w-selector είναι το πολύ:

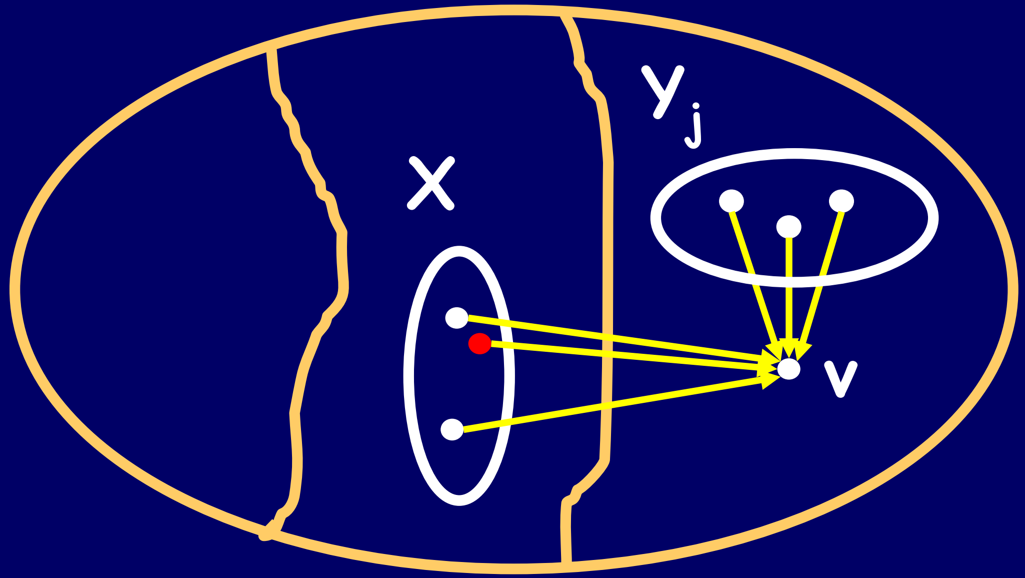
$$\sum_{\mathbf{x}=\mathbf{w}/2}^{\mathbf{w}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{y}=0}^{\mathbf{w}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{y}} \left(\frac{31}{32}\right)^{\mathbf{m}} < 1$$

Ο αλγόριθμος **DoBroadcast**

j	m_j	S_j	selector
0	$\log n$		1
1	$2\log n$		2
2	$4\log n$		4
3	$8\log n$		8
$\log n$	$n\log n$	. . .	n



$O(n\log n)$ στάδια αρκούν

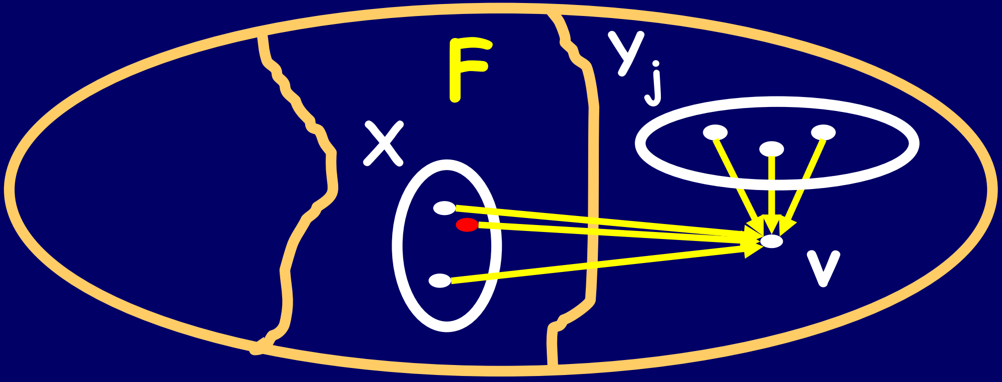


Πρόοδος:
άγνοια →
μετωπικοί →
εσωτερικοί

Η συνολική πρόοδος είναι $2n-1$ και μπορεί να επιτευχθεί σε $O(n\log n)$ στάδια.

Αποδεικνύεται, δείχνοντας ότι σε κάποιο βάθος χρόνου, θα έχει συντελεστεί πρόοδος $\Omega(1/\log n)$ και άρα για το $2n-1$ αρκούν $O(n\log n)$ στάδια.

Σκελετός απόδειξης



Είτε το Y_j είναι αρκετά μεγάλο, που σημαίνει ότι πολλοί νέοι κόμβοι πήραν το μήνυμα,

j	m_j	S_j	selector
0	*logn*		1
1	2 *logn*		2
2	4 *logn*		4
3	8 *logn*		8
logn	n *logn*	. . .	n

1 2 3 4 5 . . . n *logn*

Είτε όλοι οι μετωπικοί κόμβοι F γίνονται εσωτερικοί, μετά από |F|*logn* στάδια.

Gossiping

Παρατήρηση: Ο αλγόριθμος DoBroadcast—που μόλις είδαμε—δεν κάνει και Gossip, σε αντίθεση με τον RoundRobin.

Η ιδέα είναι οι κόμβοι να μην εκπέμπουν πριν μαζέψουν αρκετά μηνύματα, οπότε και τα στέλνουν όλα σε ένα βήμα. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται περιττές συγκρούσεις.

Ο αλγόριθμος **DoGossip**

1η Φάση:

Εκτέλεσε $\sqrt{B(n)}\, \log n$ στάδια του RoundRobin;

2η Φάση:

Repeat

→ Βρες τον κόμβο u_{max} με το μεγαλύτερο αποθηκευμένο μήνυμα $K(u_{max})$;

→ DoBroadcast με πηγή τον u_{max};

→ Για κάθε κόμβο u: $K(u) := K(u) \setminus K(u_{max})$;

Until $K(u_{max}) = 0$;

back

Στη $2^η$ φάση αρκούν $n/\sqrt{B(n)}$ επαναλήψεις

Μετά την $1^η$ φάση, κάθε μήνυμα μεταδόθηκε σε τουλάχιστον $\sqrt{B(n)}\log n$ κόμβους.

Συνεπώς, κάθε ένα από τα n μηνύματα έχει $\sqrt{B(n)}\log n$ αποθηκευμένα αντίγραφα. Όλα μαζί τα αποθηκευμένα μηνύματα είναι τουλάχιστον $n\sqrt{B(n)}\log n$.

Τελικά—μετά την $1^η$ φάση—
$K(u_{max}) \geq \sqrt{B(n)}\log n$.

Στη 2η φάση αρκούν $n/\sqrt{B(n)}$ επαναλήψεις

1ο βήμα 2ης φάσης: Τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ
$n-K(u_{max}) = n(1-\sqrt{B(n)}\log n/n) = n(1-a)$

2ο βήμα 2ης φάσης: Όμοια με προηγουμένως υπολογίζουμε ότι $K(u_{max}) = (1-a)\sqrt{B(n)}\log n$
και άρα τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ $n(1-a)-K(u_{max}) = n(1-a)^2$

⋮

iοστο βήμα 2ης φάσης: Τα διαφορετικά μηνύματα που απομένουν είναι το πολύ $n(1-a)^i$

Πώς υπολογίζουμε τα u_{max} και $K(u_{max})$;

Με Binary Search στο $[0,n]$:

→ $a := 0;$ $b := n;$ **B(n)*logn***

Repeat

→ $c := [\frac{1}{2}(a+b)];$

→ DoBroadcast με πηγή κάθε κόμβο u με $c \leq K(u) \leq b$ και μήνυμα $[c,b]$;

→ Εάν μετά από χρόνο $B(n)$ έχουν λάβει το μήνυμα, θέτουν $a := c$, αλλιώς $b := c-1;$

Until $a = b;$

return $a;$

Πώς υπολογίζουμε τα $\mathbf{u_{max}}$ και $\mathbf{K(u_{max})}$;

Με Binary Search στο [0,n]:

→ a := 0; b := n;

B(n)*logn*

Repeat

→ c := [½(a+b)];

→ DoBroadcast με πηγή κάθε κόμβο u με K(u) = K(u_{max}) και c ≤ u ≤ b και μήνυμα [c,b];

→ Εάν μετά από χρόνο B(n) έχουν λάβει το μήνυμα, θέτουν a := c, αλλιώς b := c-1;

Until a = b;

return a;

DoGossip

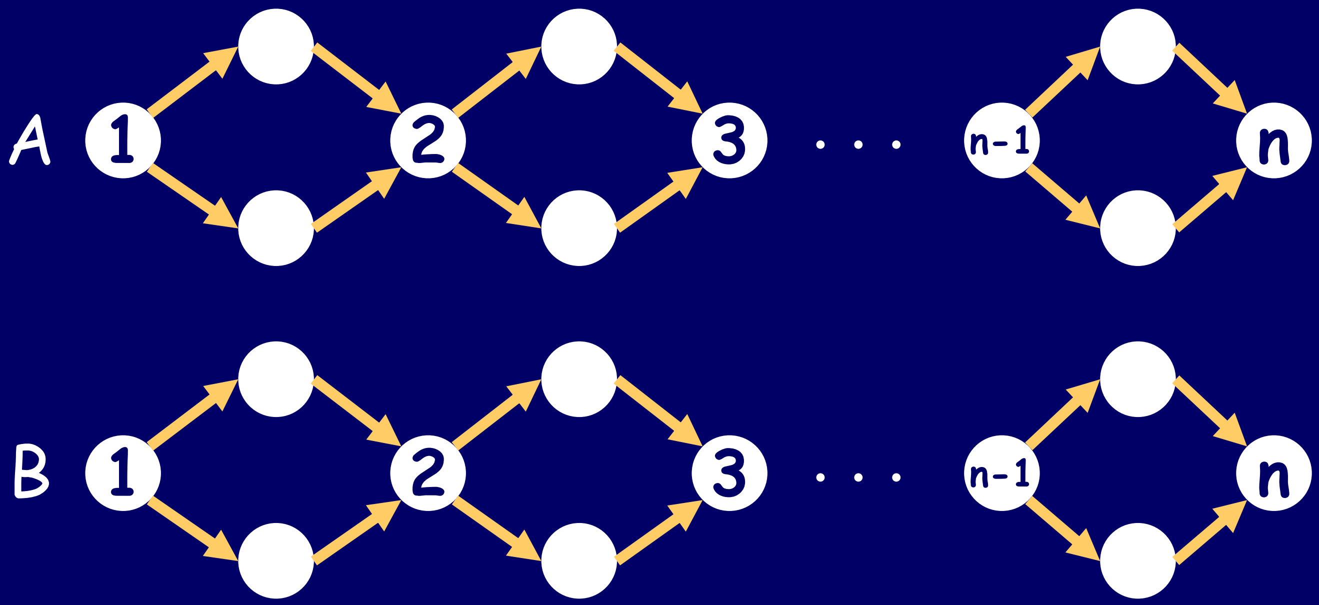
Αποτελέσματα

Θεώρημα: Ο αλγόριθμος DoBroadcast επιτυγχάνει μετάδοση σε $O(n\log^2 n)$.

Θεώρημα: Χρησιμοποιώντας αλγόριθμο για broadcast πολυπλοκότητας $B(n)$, μπορούμε να επιτύχουμε *gossiping* σε $O(n\sqrt{B(n)}\log n)$ βήματα.

Θεώρημα: Υπάρχει αλγόριθμος που επιτυγχάνει *gossiping* σε $O(n^{1.5}\log^2 n)$ βήματα.

$\Omega(n\,log\,n)$ Lower bound



	$1\ 2\ \ldots\ lg[2(n-1)-1]$
1	0 1 1 0 0 0 1 . . . 1 0
2	0 1 0 0 1 0 1 . . . 1 0
•	
•	
•	
2(n-1)	1 1 0 0 1 0 0 . . . 0 1

$lg[2(n-1)-1]\ +$

$lg[2(n-3)-1]\ +$

.
.
.

$1 = \Theta(n\,lg\,n)$