Approximating Map Labeling

Michael A. Bekos
School of Applied Mathematics and Physical Sciences
National Technical University of Athens
Greece

Outline

- *A Packing Problem with Applications to Lettering of Maps* (M. Formann, F. Wagner).
- *A polynomial time solution for labeling a rectilinear map* (C.K. Poon, B. Zhu and F. Chin) .
- *Label Placement by Maximum Independent Set in Rectangles* (P. K. Agarwal, M. van Kreveld, S. Suri).
- *Πακέτο Λογισμικού y-Files.*

Το Πρόβλημα της τοποθέτησης ετικετών

- **Πρόβλημα:** *Με ποιο τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε σε ένα χάρτη τις προσδιοριστικές ετικέτες, ώστε αυτός να είναι ευανάγνωστος;*
- **Ανάγκη διατύπωσης βασικών Αρχών–Κανόνων**
- **[Yoeli 1972 και Imhof 1975]**

Γενικοί Κανόνες

Οι ετικέτες θα πρέπει να:

- Είναι **ευανάγνωστες**.
- **Προσδιορίζονται εύκολα** στο χάρτη.
- **Αποδίδονται εύκολα** στο αντικείμενο.
- Μην **καλύπτουν** άλλα συστατικά του χάρτη.
- **Αναδεικνύουν την ιεραρχία** των αντικειμένων σε έναν χάρτη (διαφορετικά μεγέθη, γραμματοσειρές και χρώματα).
- **Κατανέμονται ομοιόμορφα** στον χάρτη.

Τύποι τοποθέτησης ετικετών

- **Τοποθέτηση ετικετών σε σημεία**
- **Τοποθέτηση ετικετών σε ευθύγραμμα τμήματα ή καμπύλες**
- **Τοποθέτηση ετικετών σε περιοχές**

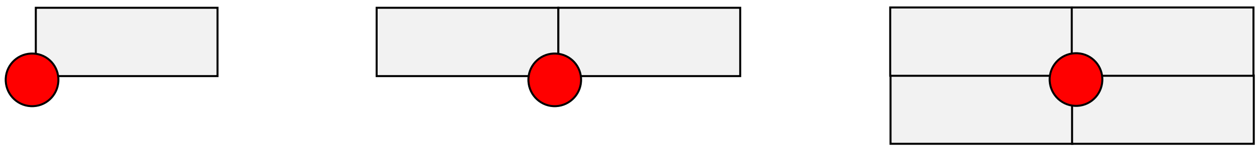
Παρατήρηση: Η τοποθέτηση μιας ετικέτας σε κάποια από αυτές τις κατηγορίες εξαρτάται άμεσα από την κλίμακα του χάρτη.

Τοποθέτηση ετικετών σε σημεία

- **Μοντέλα:**
  - **Σταθερής θέσης:** Κάθε κόμβος έχει ένα σταθερό σύνολο θέσεων, στις οποίες μπορούν να τοποθετηθούν οι προσδιοριστικές ετικέτες.
  - **Σταθερής θέσης με αυξομειόσιμού μεγέθους ετικέτες**.
  - **Κύλισης:** Κάθε ετικέτα δύναται να τοποθετηθεί σε διάφορες θέσεις υπό την προϋπόθεση ότι εφάπτεται του κόμβου.
- **Προβλήματα:**
  - **Απόφασης:** Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν όλες οι ετικέτες σε νόμιμες θέσεις, έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται;
  - **Τοποθέτησης:** Εάν η απάντηση στο πρόβλημα απόφασης είναι καταφατική, να βρεθεί μια τέτοια τοποθέτηση.
  - **Μεγιστοποίησης του αριθμού των ετικετών.**
  - **Μεγιστοποίησης του μεγέθους των ετικετών.**

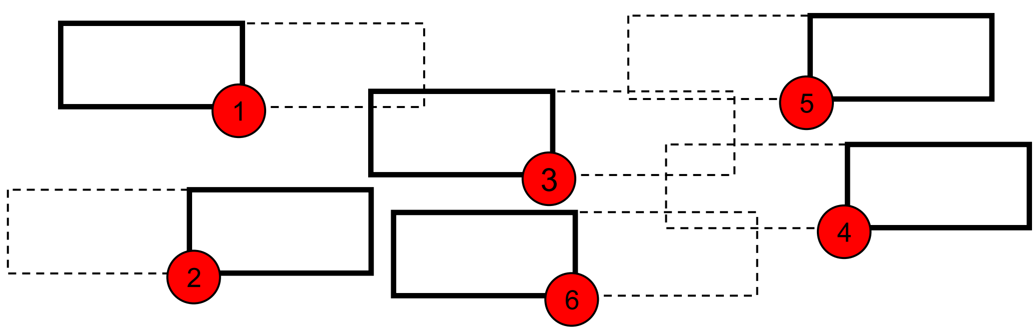
Τα μοντέλα 1-θέσης, 2-θέσεων και 4-θέσεων

- **Περιγραφή:**



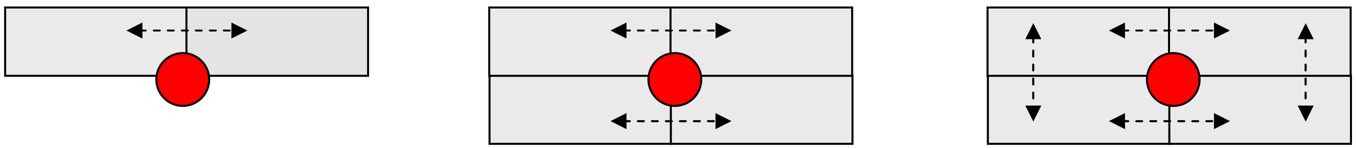
Μοντέλο 1-θέσης   Μοντέλο 2-θέσεων   Μοντέλο 4-θέσεων

- **Παράδειγμα τοποθέτησης με το μοντέλο 2-θέσεων:**



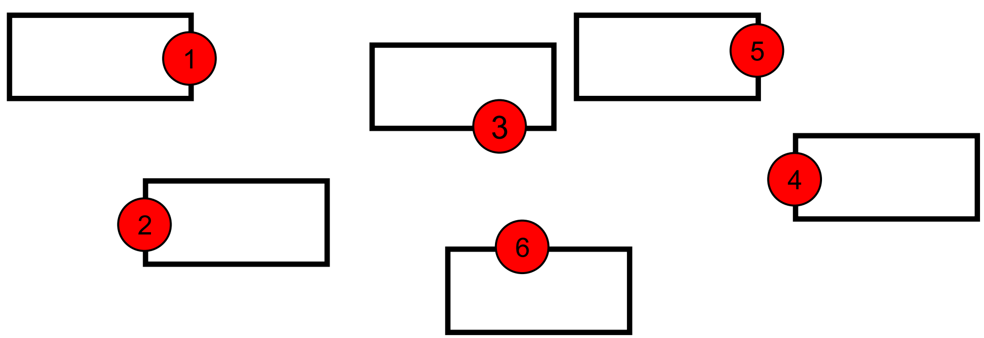
Τα μοντέλα 1-slider, 2-slider και 4-slider

- **Περιγραφή:**



Μοντέλο 1-slider　　Μοντέλο 2 - slider　　Μοντέλο 4 - slider

- **Παράδειγμα τοποθέτησης με το μοντέλο 4-slider:**



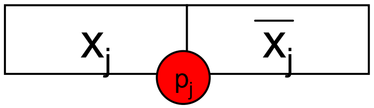
Τα προβλήματα 2-SAT και 3-SAT

- **Λογική παράσταση:** $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$
  - x_i ⟵ **Λογικές Μεταβλητές[True-False]**
  - $\vee$, $\wedge$ ⟵ **Λογικοί τελεστές.**
  - Ένας **λογικός όρος** αποτελείται από λογικές μεταβλητές (ή τις αρνήσεις τους) οι οποίες συνδέονται με το λογικό ή ($\vee$).
- **Πρόβλημα ικανοποιησιμότητας:** Υπάρχει μια νόμιμη εκχώρηση τιμών αληθείας στις μεταβλητές της λογικής παράστασης η οποία να την καθιστά αληθή;

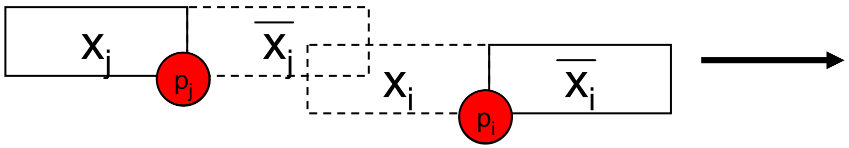
- 2-SAT ⟵ Επιλύεται σε χρόνο γραμμικό ως προς τον αριθμό των λογικών όρων του.
- 3-SAT ⟵ Ανήκει στην κλάση NP-Complete.

Ένας αλγόριθμος για το μοντέλο 2-θέσεων

1. Σε καθένα από τα σημεία αντιστοιχούμε μια μεταβλητή αληθείας.



2. Επικάλυψη ετικετών:

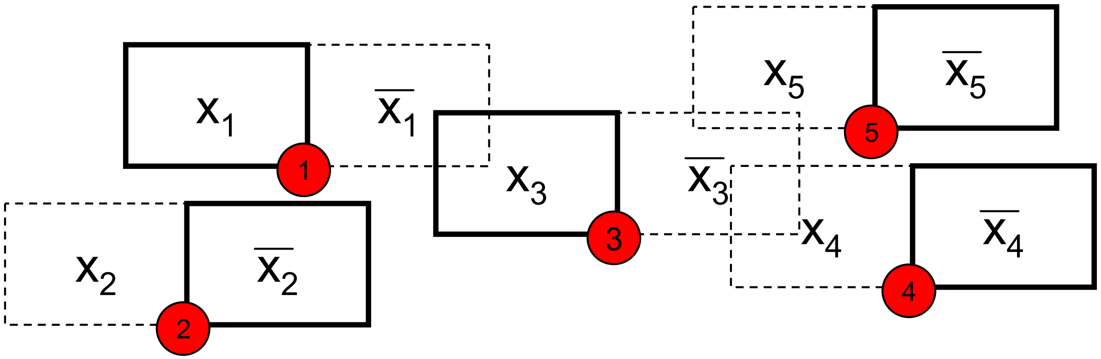


$$\overline{(\overline{x}_i \wedge x_j)} = \overline{x}_i \vee x_j$$

3. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για κάθε ζεύγος επικαλυπτόμενων ετικετών κατασκευάζουμε μια λογική παράσταση.

4. Για την λογική παράσταση αυτή, έλεγξε εάν υπάρχει μια νόμιμη εκχώρηση τιμών αληθείας.

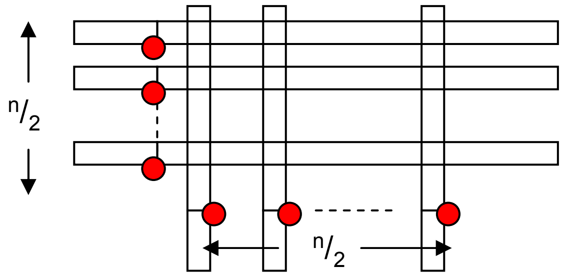
Παράδειγμα



- **Λογική παράσταση:** $(\overline{x_3} \vee x_1) \wedge (x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5})$
- **Μία αποδεκτή λύση:**
  - x_1 = true
  - x_2 = false
  - x_3 = true
  - x_4 = false
  - x_5 = false

Το μοντέλο των 2-θέσεων (συνέχεια)

- **Πολυπλοκότητα:** $O(n^2)$ τομές => $O(n^2)$ πολυπλοκότητα

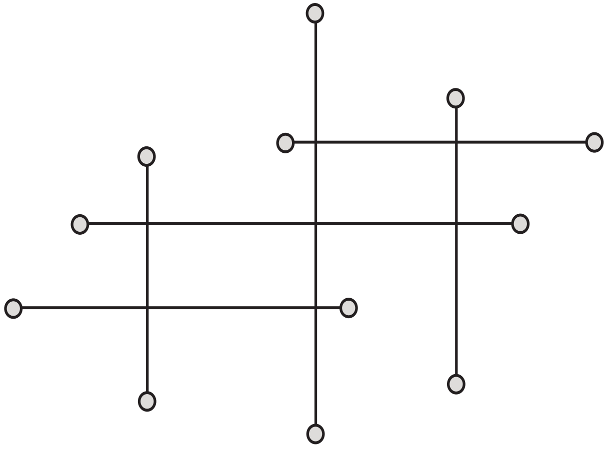


Ορθοκάθετοι Χάρτες

- **Ορισμός:** Ένας ορθοκάθετος χάρτης αποτελείται από μόνο οριζόντια ή κάθετα ευθύγραμμα τμήματα.

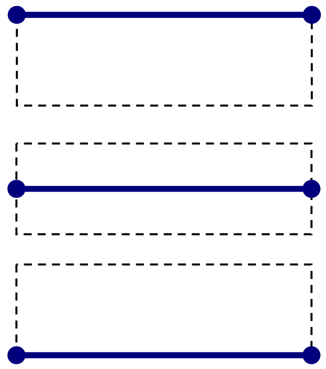
- **Παρατήρηση:** Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της τοποθέτησης ετικετών σε ορθοκάθετους χάρτες.

- **Παράδειγμα ορθοκάθετου χάρτη:**

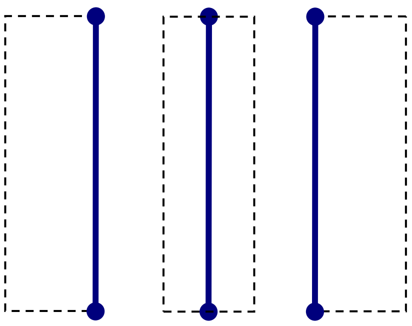


Το μοντέλο των 3-θέσεων

- **Περιγραφή:**

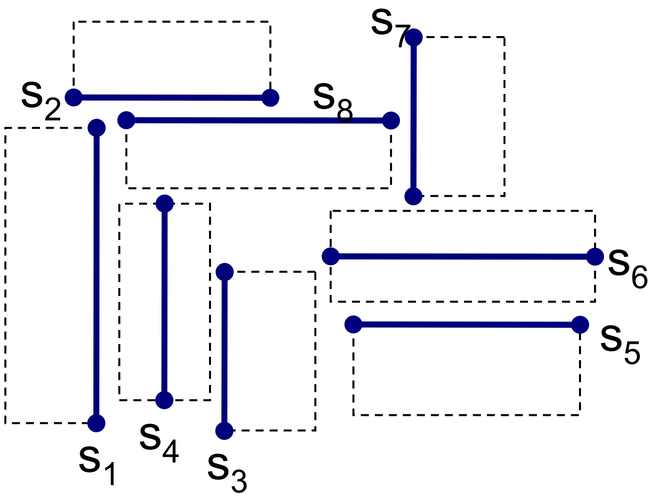


Οριζόντια Ευθ. τμήματα



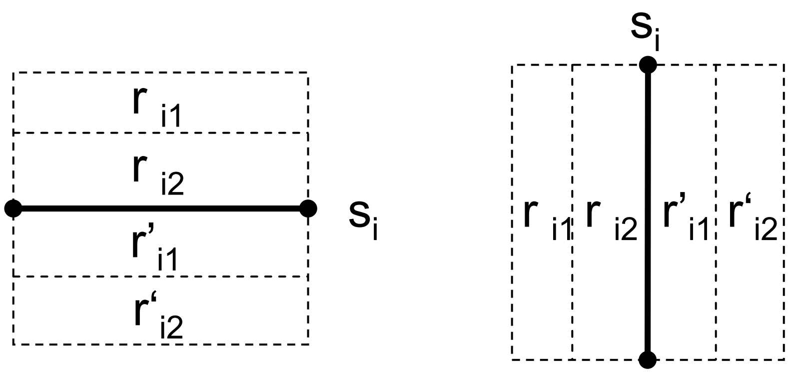
Κάθετα Ευθ. τμήματα

- **Παράδειγμα:**



Ένας αλγόριθμος για το μοντέλο 3-θέσεων

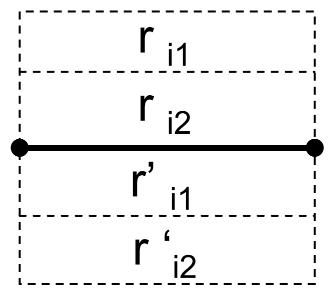
- Διαμερίζουμε την περιοχή γύρω από κάθε ευθύγραμμο τμήμα s_i, στην οποία μπορούν να τοποθετηθούν οι συνοδευτικές ετικέτες με συνολικά τέσσερα ορθογώνια:

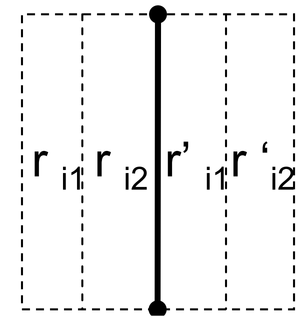


- $s_i \longrightarrow$ οριζόντιο
  - r_{i1} και r_{i2} έχουν επικαλυφθεί => Τοποθέτηση επάνω
  - r_{i2} και r'_{i1} έχουν επικαλυφθεί => Τοποθέτηση κατά μήκος
  - r'_{i1} και r'_{i2} έχουν επικαλυφθεί => Τοποθέτηση κάτω

Ένας αλγόριθμος για το μοντέλο 3-θέσεων

- Θεωρούμε δύο μεταβλητές αληθείας x_{i1} και x_{i2}:
  - x_{i1} = true <=> Το r_{i1} έχει καλυφθεί.
  - x_{i2} = true <=> Το r_{i2} έχει καλυφθεί.



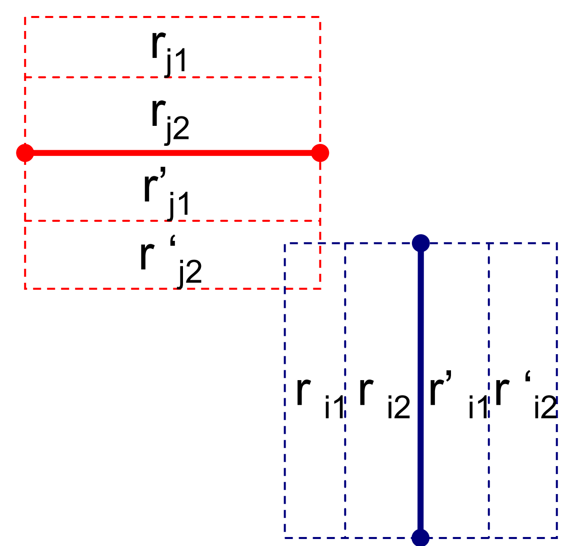


- Νόμιμοι τρόποι τοποθέτησης:

$$\overline{(x_{i1} \wedge \overline{x_{i2}})} = (\overline{x_{i1}} \vee x_{i2})$$

- Αν δύο ορθογώνια, έστω τα r_{i1} και r'_{j2} επικαλύπτονται:

$$\overline{(x_{i1} \wedge \overline{x_{j2}})} = (\overline{x_{i1}} \vee x_{j2})$$



Ένας αλγόριθμος για το μοντέλο 3-θέσεων

- **Αλγόριθμος [Poon, Zhu και Chin 1998]:**

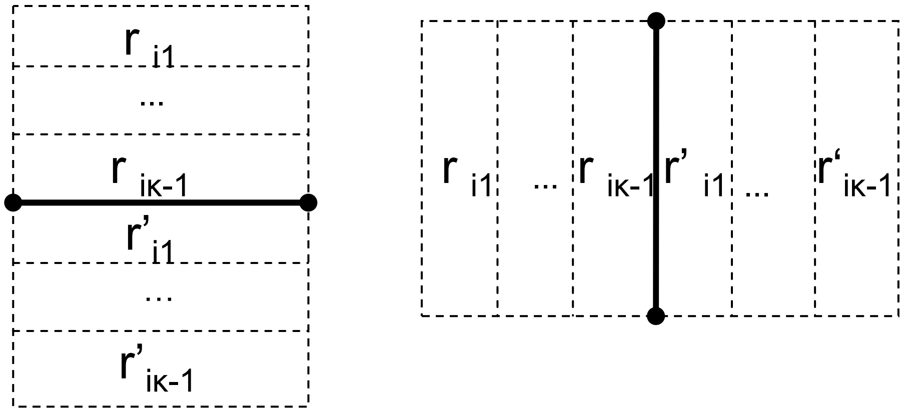
1. Υπολόγισε τις τομές μεταξύ ετικετών διαφορετικών ευθυγράμμων τμημάτων.
2. C_s ← Νόμιμοι τρόποι τοποθέτησης.
3. C_c ← Τομές ετικετών.
4. Για την λογική παράσταση που σχηματίζεται από τους όρους των C_c και C_s έλεγξε εάν υπάρχει μια νόμιμη εκχώρηση τιμών αληθείας.

O(nlogn+I) | O(n) | O(I) | O(n+I)

=O(nlogn+I)

Το μοντέλο των k-θέσεων

- **Γενίκευση:**



- **Παρατήρηση:** Μια νόμιμη ετικέτα θα καταλαμβάνει k διαδοχικά ορθογώνια.

- **[Poon, Zhu και Chin 1998]:** Το πρόβλημα της τοποθέτησης προσδιοριστικών ετικετών μπορεί να επιλυθεί σε O(k(I+n)+nlogn) χρόνο, όπου I είναι ο αριθμός των αλληλεπιδρόντων ευθυγράμμων τμημάτων.

Το μοντέλο των 4-θέσεων

- **[Formann και Wagner 1981]:** Το πρόβλημα της απόφασης είναι NP-Complete.

- **[Formann και Wagner 1981]:** Για το πρόβλημα της τοποθέτησης υπάρχει ένας O(nlogn) αλγόριθμος που κατασκευάζει μια λύση με ετικέτες μεγέθους τουλάχιστον 50% του μεγέθους σε μια βέλτιστη λύση ***(1/2-προσέγγιση στο μέγεθος)***.

  Περιγραφή:
  - Τοποθέτησε στα σημεία τετράγωνα ιδίου μεγέθους, τα οποία αρχικά είναι πολύ μικρά (σ $\longrightarrow$ 0).
  - **While** (υπάρχει λύση)

    {

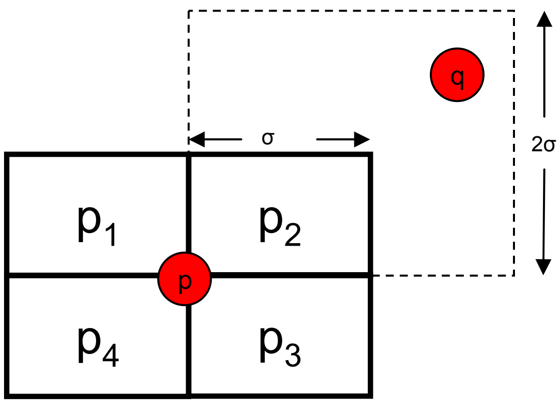
    αύξησε το μέγεθος σ όλων των τετραγώνων;

    εξαίρεσε όσο το δυνατόν περισσότερα τετράγωνα;

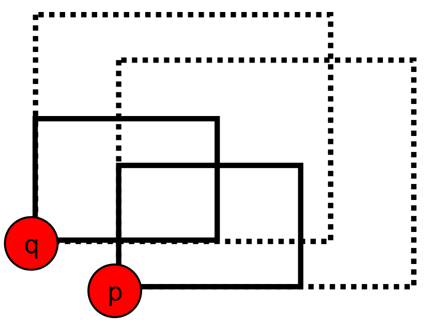
    }
  - Επέστρεψε την λύση του αμέσως προηγούμενου βήματος.

Το μοντέλο των 4-θέσεων

- **(p_i,σ)-κατηγοριοποίηση ετικετών:**
  - σ-dead: 2σp_i περιέχει κάποιο σημείο q.
  - σ-pending: p_i δεν είναι σ-dead & σp_i ∩ σq_j != 0
  - σ-alive



σ-dead



σ-pending

Το μοντέλο των 4-θέσεων

- **Αλγόριθμος:**
  - Τοποθέτησε στα σημεία τετράγωνα μεγέθους σ=0.
  - **Do**

    {

    αύξησε το μέγεθος σ όλων των τετραγώνων;

    σ-dead ετικέτες → Απαλοιφή;

    σ-alive ετικέτες → Κράτα μια λύση;

    σ-pending ετικέτες → 2-position Algorithm;

    }

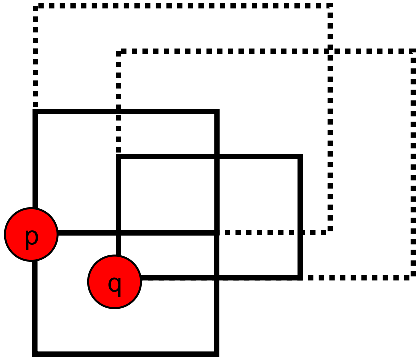
    While (2-position Algorithm returns «Yes» and there exists squares that has not been eliminated)
  - Επέστρεψε την λύση του αμέσως προηγούμενου βήματος.

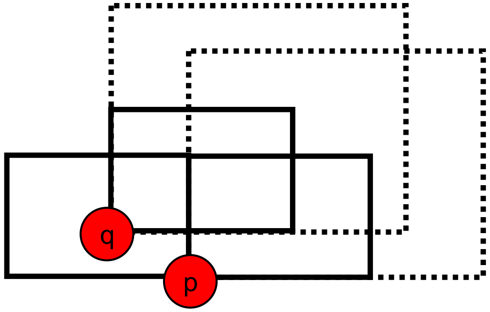
- **Μόνο σ-dead τετράγωνα απαλείφονται (=> 2 SOL $\leq$ OPT).**
- **Από τα εναπομείναντα τετράγωνα είναι πάντοτε εφικτό να κατασκευαστεί μια λύση.**

Το μοντέλο των 4-θέσεων

- **Θεώρημα:** Το πλήθος των σ-pending ετικετών ενός σημείου p είναι το πολύ δύο.

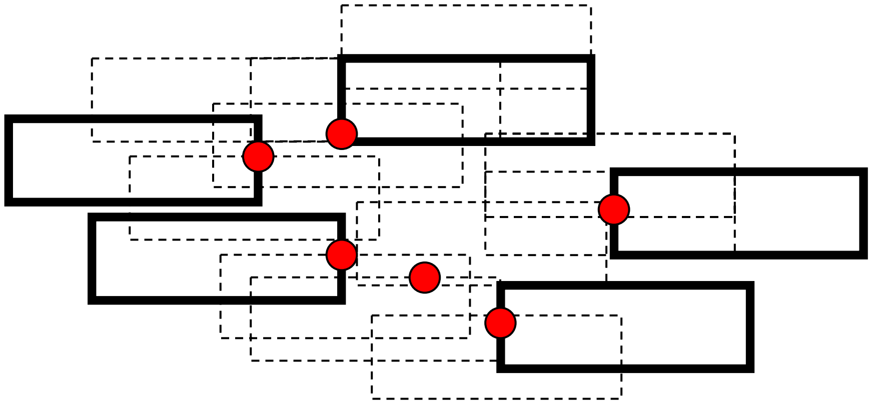
  Απόδειξη:
  - Έστω ότι το p_1 είναι σ-pending => p_2 ή p_4 είναι σ-dead…
  - $p_{1,}$ $p_{2,}$ p_3 σ-pending => Άτοπο.





Μεγιστοποίηση του αριθμού των ετικετών

- **Μοντελοποίηση:** Μέγιστο σύνολο ανεξάρτητων (μη επικαλυπτόμενων) ορθογωνίων.
  - R_i = { r_i : Το r_i είναι ορθογώνιο που νόμιμα μπορεί να τοποθετηθεί στο σημείο pi}.
  - $R = UR_i$
- **Ιδέα:** Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του αριθμού των ετικετών ταυτίζεται με το πρόβλημα της εύρεσης ενός μέγιστου υποσυνόλου ξένων ορθογωνίων του R.



Αφού όλα τα ορθογώνια του R_i έχουν κοινό σημείο τομής το p_i, μόνο ένα ορθογώνιο από το R_i μπορεί να επιλεγεί.

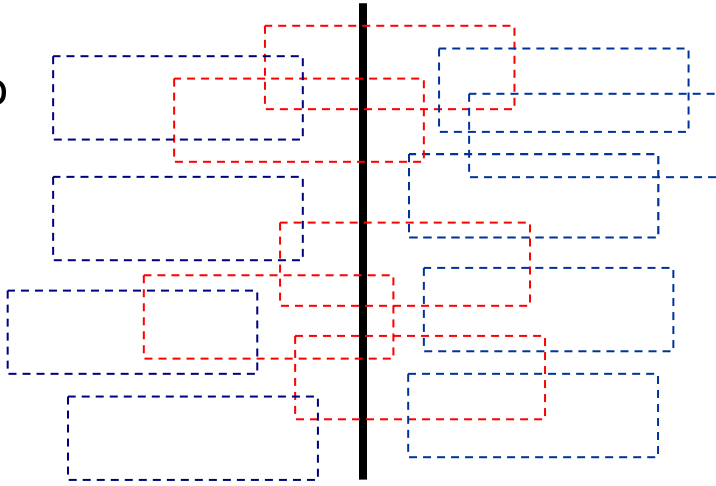
Μεγιστοποίηση του αριθμού των ετικετών

- **Παρατήρηση:** Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα της εύρεσης ενός μέγιστου συνόλου ανεξαρτήτων ορθογωνίων είναι NP-Complete.

- Μονάχα η ανάπτυξη προσεγγιστικών αλγόριθμων παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Μεγιστοποίηση του αριθμού των ετικετών

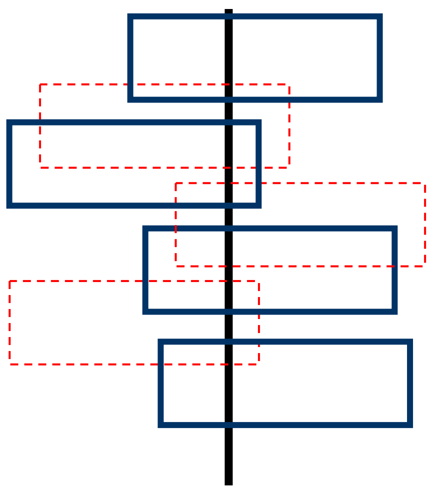
- **[Agarwal, van Kreveld και Suri 1998]:** Υπάρχει ένας O(nlogn) αλγόριθμος που υπολογίζει ένα ανεξάρτητο σύνολο ορθογωνίων του R μεγέθους τουλάχιστον *γ/logn*, όπου γ είναι το μέγεθος του μέγιστου συνόλου ανεξάρτητων ορθογωνίων του R.



- **Ιδέα:** Θεωρώντας μια ευθεία l διαμερίζουμε το σύνολο R σε τρία υποσύνολα, R_1, R_2, R_{12}:
  - R_{12}: Τα ορθογώνια που τέμνει η ευθεία l.
  - R_1: Τα ορθογώνια που βρίσκονται δεξιά της l.
  - R_2: Τα ορθογώνια που βρίσκονται αριστερά της l.
- **$IS(R) = \max\{ IS(R_{12}), IS(R_1) \cup IS(R_2) \}$**

Μεγιστοποίηση του αριθμού των ετικετών

- **Υπολογισμός του MIS στο R_{12}**



Απόδειξη προσεγγιστικού παράγοντα

- Έστω:

$$I^*, I^*_{12},\ I^*_1\ \text{και}\ I^*_2 \xleftarrow{\text{MIS}} R, R_{12}, R_1\ \text{και}\ R_2$$

- $I^*_{12} \equiv I_{12} \Rightarrow |I^*_{12}| = |I_{12}| \geq |I^* \cap R_{12}|$
- Λόγω του επαγωγικού βήματος:

$$|I_1| \geq \frac{|I^*_1|}{\log n/2} \geq \frac{|I^* \cap R_1|}{\log n - 1}$$

$$|I_2| \geq \frac{|I^*_2|}{\log n/2} \geq \frac{|I^* \cap R_2|}{\log n - 1}$$

- Συνεπώς:

$$|I| = \max|I_{12}, I_1 + I_2| \geq max\{|I^* \cap R_{12}|, \frac{|I^* \cap R_1| + |I^* \cap R_2|}{\log n - 1}\} \geq$$

$$max\{|I^* \cap R_{12}|, \frac{|I^*| - |I^* \cap R_{12}|}{\log n - 1}\}$$

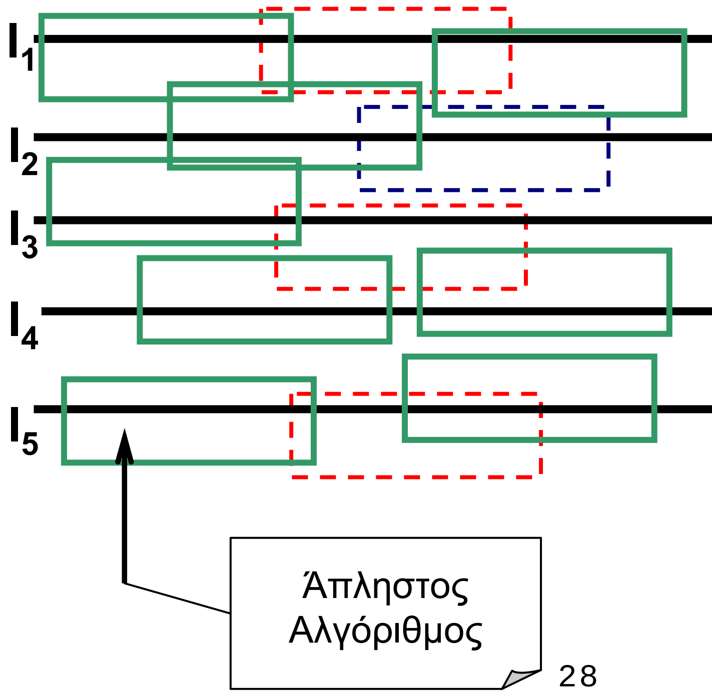
- Εάν $|I^* \cap R_{12}| \geq \frac{|I^*|}{\log n}$, το επαγωγικό βήμα έχει ήδη αποδειχθεί, αλλιώς:

$$\frac{|I^*| - |I^* \cap R_{12}|}{\log n - 1} \geq \frac{|I^*| - |I^*|/\log n}{\log n - 1} = \frac{|I^*|}{\log n}$$

Μεγιστοποίηση του αριθμού των ετικετών

- **Θεώρημα [Agarwal, van Kreveld και Suri 1998]:** Ένα ανεξάρτητο σύνολο ορθογωνίων *μοναδιαίου ύψους* του R μεγέθους τουλάχιστον γ/2 μπορεί να υπολογιστεί σε O(nlogn) χρόνο, όπου γ είναι το μέγεθος του μέγιστου συνόλου ανεξάρτητων ορθογωνίων του R.

- **Ιδέα:** Θεωρούμε m οριζόντιες ευθείες $l_1, \ldots, l_m$ έτσι ώστε:
  - Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ευθειών να είναι μεγαλύτερη από ένα.
  - Κάθε ευθεία να τέμνει τουλάχιστον ένα ορθογώνιο.
  - Κάθε ορθογώνιο να τέμνεται από τουλάχιστον μια ευθεία.



- **IS(R) = max{IS(l_1) U IS(l_3) U…U IS(l_{m-1}), IS(l_2) U IS(l_4) U…U IS(l_m)}**

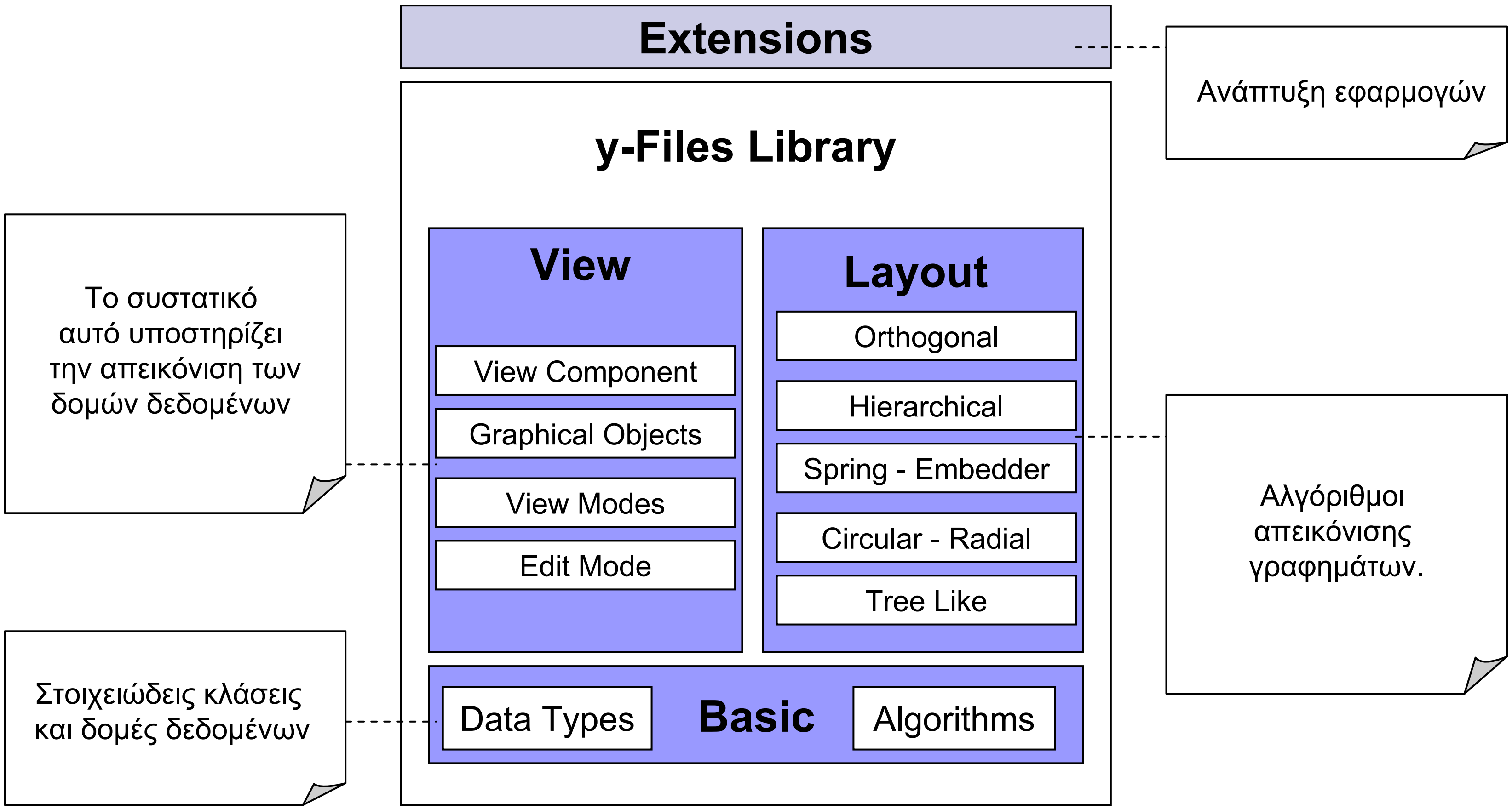
Η βιβλιοθήκη y-Files

- Η βιβλιοθήκη y-Files έχει σχεδιαστεί και αναπτυχθεί ολοκληρωτικά σε περιβάλλον Java και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανεξάρτητα σε οποιαδήποτε εφαρμογή στην πλατφόρμα της Java 2, αλλά και σε οποιοδήποτε λειτουργικό σύστημα:
  - Linux
  - Solaris
  - MacOS X
  - Microsoft Windows

- Πρόκειται για ένα εμπορικό προϊόν το οποίο διανέμεται από την yWorks GmbH, ενώ μια περιορισμένων δυνατοτήτων έκδοση της διατίθεται δωρεάν στο διαδίκτυο:

http://www.yworks.com

Η δομή της βιβλιοθήκης y-Files



Τοποθέτηση ετικετών με την βιβλιοθήκη yFiles

- Το πακέτο y.layout.labeling της βιβλιοθήκη y-Files υποστηρίζει δύο αλγορίθμους τοποθέτησης συνοδευτικών ετικετών:
  - Μέγιστο σύνολου ανεξαρτήτων ορθογωνίων (MIS-Labeling).
  - Simulated Annealing στρατηγική (SA-Labeling).

- **Παρατήρηση:** Πριν εκτελέσουμε οποιονδήποτε αλγόριθμο θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε το μοντέλο τοποθέτησης των ετικετών.

- 14 διαφορετικά μοντέλα τοποθέτησης:
  - 7 ⟵ μοντέλα τοποθέτησης ετικετών σε κόμβους
  - 7 ⟵ μοντέλα τοποθέτησης ετικετών σε ακμές.

Παρουσίαση Αλγορίθμων