“OPTICAL WAVELENGTH ROUTING ON DIRECTED FIBER TREES”

Thomas Erlebach, Klaus Jansen, Christos Kaklamanis, Milena Michail, Pino Persiano

by Rafios Xenofon

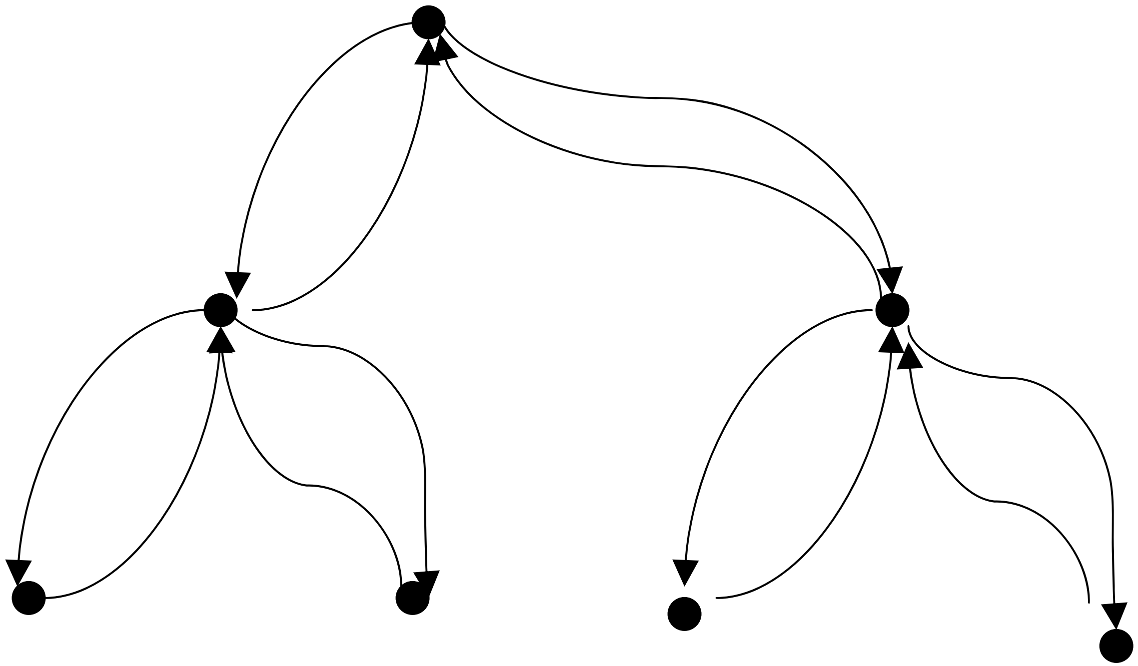
Το Πρόβλημα

«Wavelength Routing Problem on directed Trees (D-trees)»
ή
«D-tree Path Coloring»

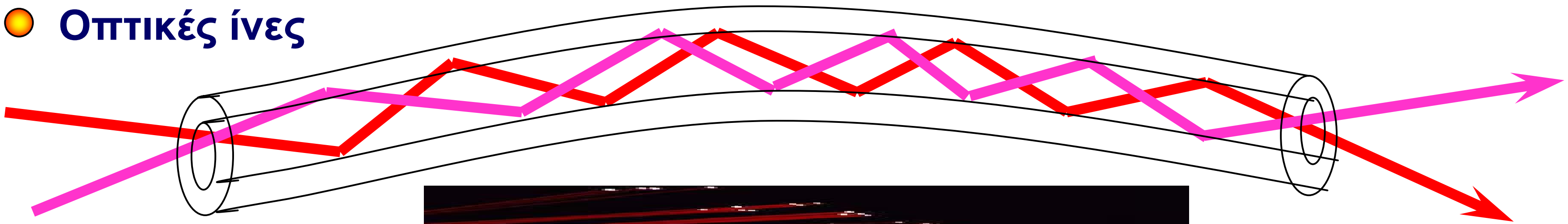
Εχουμε έναν αριθμό αιτήσεων μέγιστου φορτίου L σε κατευθυνόμενο δέντρο οπτικών ινών και ο σκοπός είναι να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν λιγότερα μήκη κύματος (χρώματα) για να ικανοποιήσουμε αυτές τις αιτήσεις

Τι σημαίνει όμως κατευθυνόμενο δέντρο οπτικών ινών;

Δέντρο όπου κάθε ακμή του δέντρου αποτελείται από δύο αντιθέτου φοράς κατευθυνόμενες ακμές.



Οπτικές ίνες



Γιατί πρέπει να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα (μήκη κύματος);

Γιατι δεν μπορούν δύο μηνύματα με ίδιο μήκος κύματος (χρώμα) να «περάσουν» ταυτόχρονα από την ίδια κατευθυνόμενη ακμή του δέντρου.

Επίσης ο αριθμός των διαθέσιμων μηκών κύματος (χρωμάτων) δεν είναι παραπάνω απο 30 με 40.

Ετσι, λοιπόν, θα πρέπει να βρούμε τρόπο να ικανοποιήσουμε τις αιτήσεις με όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα.

Τι εννοούμε με την έκφραση «μέγιστο φορτίο L»;

Ο μέγιστος αριθμός σημάτων που περνάνε ταυτόχρονα από μια κατευθυνόμενη ακμή του δικτύου.

Π Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Η

ΣΣτη δημοσίευση αυτή παρουσιάζονται δύο θέματα:

1. Ενας άπληστος αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το πρόβλημα που παρουσιάσαμε προηγουμένως ο οποίος χρησιμοποιεί το πολύ (5/3)L χρώματα –μήκη κύματος.
2. Αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει άπληστος αλγόριθμος που μπορεί να χρησιμοποιήσει λιγότερα από (5/3)L χρώματα σ’ένα κατευθυνόμενο δέντρο οπτικών ινών και έτσι ο αλγόριθμός μας είναι βέλτιστος στην κλάση των άπληστων των αλγορίθμων.

ΠΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

1.Ολοι οι γνωστοί αλγόριθμοι γι’ αυτό το πρόβλημα είναι άπληστοι
2.Το μικρότερο όριο που έχει βρεθεί είναι (5/4)L

Τι θα παρουσιάσουμε στις επόμενες παραγράφους:

Α. Την αναγωγή του «WRP σε κατευθυνόμενα δέντρα» σε μια ειδικά περίπτωση ενός bipartite edge coloring problem.

Β. Εναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για την επίλυση του bipartite edge coloring problem.

Γ. Το μικρότερο όριο για οποιοδήποτε άπληστο αλγόριθμο για το συγκεκριμένο πρόβλημα { (5/3)L }.

A. Αναγωγή του «WRP σε κατευθυνόμενα δέντρα» σε μια ειδικά περίπτωση ενός bipartite edge coloring problem.

1. Ο αλγόριθμος μας αρχικά τρέχει τον DFS αλγόριθμο με σκοπό να υπολογίσει έναν Depth First αριθμό για κάθε κόμβο.

2. Ξεκινάει με τον κόμβο με τον μικρότερο DF αριθμό και χρωματίζει όλα τα μονοπάτια που «ακουμπάνε» αυτόν (δηλαδή ξεκινάνε ή σταματάνε σε αυτόν).

Ο αλγόριθμος αποτελείται απο βήματα-φάσεις. Κάθε μια τέτοια φάση αν/χεί σ'έναν κόμβο.

3. Στη γενική περίπτωση όταν ο αλγόριθμος βρίσκεται στη φάση όπου «μελετάει» τον κόμβο v τότε θεωρούμε ότι έχουμε ήδη χρωματίσει όλα τα μονοπάτια που «ακουμπάνε» (ξεκινάνε ή διασχίζουν ή σταματάνε) σε κόμβους με μικρότερο DF αριθμό και ότι κανένα άλλο μονοπάτι δεν έχει χρωματισθεί.

4. Κατά τη διάρκεια της φάσης αυτής ο «σωστός» χρωματισμός επεκτείνεται σε αυτόν όπου αντιστοιχούμε τα «σωστά» χρώματα σε όλα τα μονοπάτια που ακουμπάνε τον κόμβο v αλλά δεν έχουν χρωματισθεί ακόμη.

5. Κατά τη διάρκεια κάθε φάσης ο αλγόριθμος δεν ξαναχρωματίζει μονοπάτια που έχει χρωματίσει σε προηγούμενες φάσεις.

6. Σε κάθε φάση για να βρούμε τα «σωστά» χρώματα που αν/χούν στα μονοπάτια που «ακουμπάνε» τον τυχαίο κόμβο v θα πρέπει να «τρέξουμε» τον αλγόριθμο που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο με είσοδο τον διμερή γράφο G_V.

7. Θα χρωματίσουμε το διμερή γράφο G_V έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

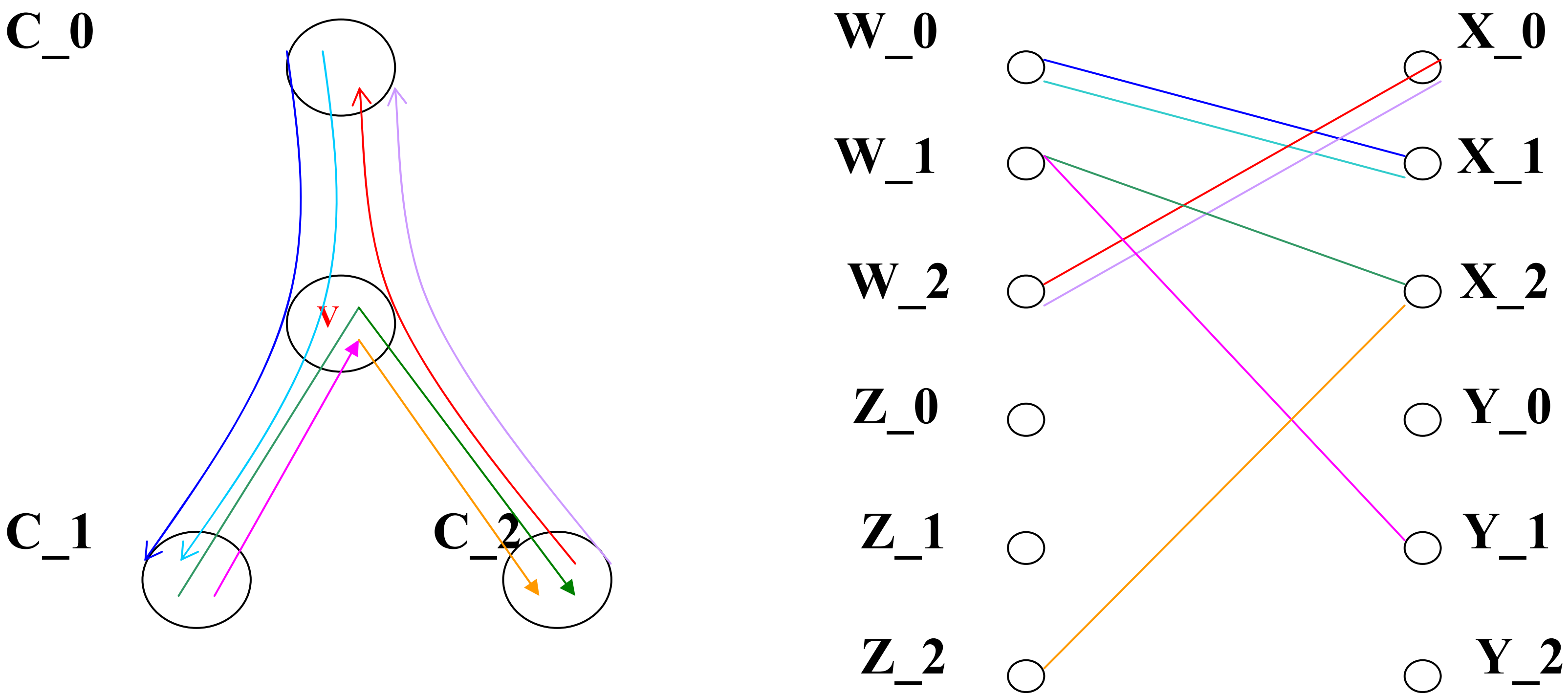
ΣΥΝΘΗΚΗ 1: **Ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων να είναι το πολύ 5/3 L χρώματα**

ΣΥΝΘΗΚΗ 2: Κ**άθε ζευγάρι από απέναντι πλευρές στο γράφο G_V να χρειάζεται το πολύ 4/3 L χρώματα.**

ΑΝΑΓΩΓΗ(1)............

Πως όμως ανάγουμε το πρόβλημα του χρωματισμού των μονοπατιών που διασχίζουν τον κόμβο v σ΄ένα κατευθυνόμενο δέντρο στο πρόβλημα του χρωματισμού ακμών ένος διμερή γράφου;

Θεωρούμε κόμβο v στο κατευθυνόμενο δέντρο μας και θα ανάγουμε το Path Coloring σ’ένα γράφο G_V όπως θα δούμε στη συνέχεια.

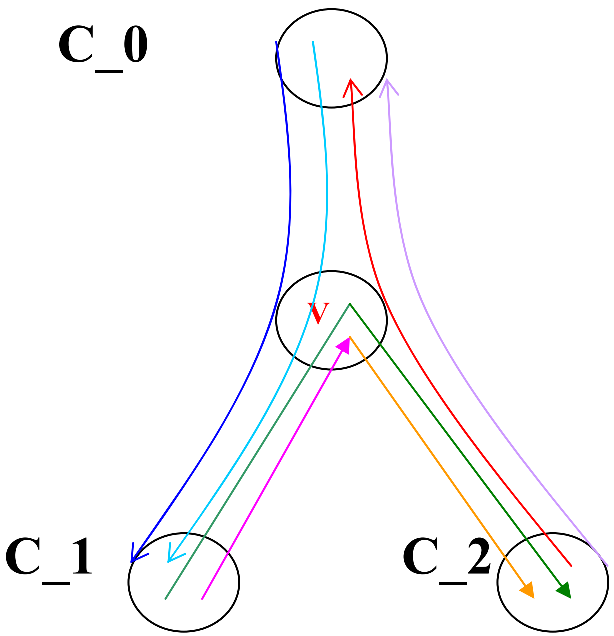


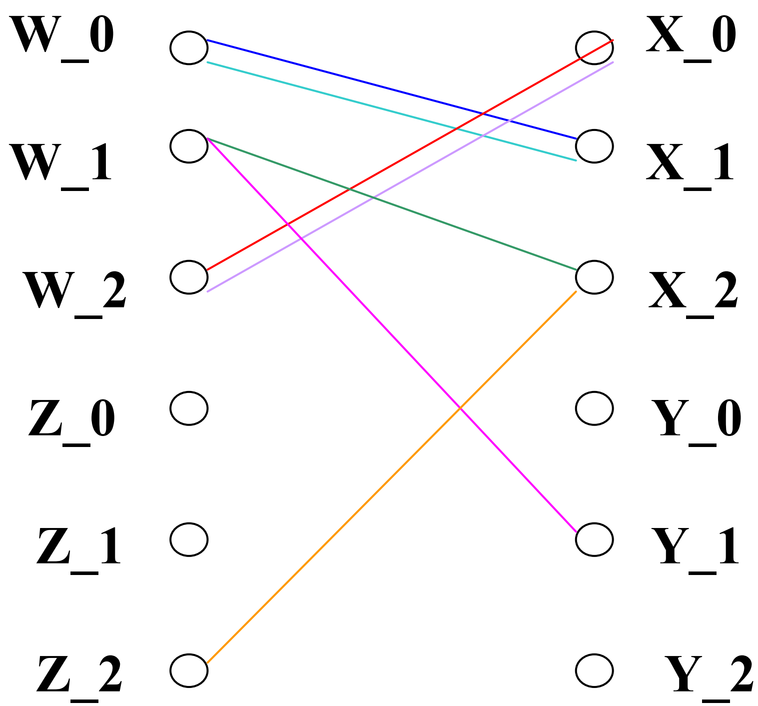
ΑΝΑΓΩΓΗ (2)..................

Θεωρούμε ότι σε κάθε κατευθυνόμενη ακμή έχουμε μέγιστο φορτίο L (στο παράδειγμά μας L=2).

Επίσης C_0 είναι ο γονέας του V και C_1, C_2, …, C_i είναι τα παιδιά του V.

Για κάθε κόμβο C_i χρειαζόμαστε στο διμερές γράφο 4 κόμβους.
Τους W_i, X_i, Z_i, Y_I



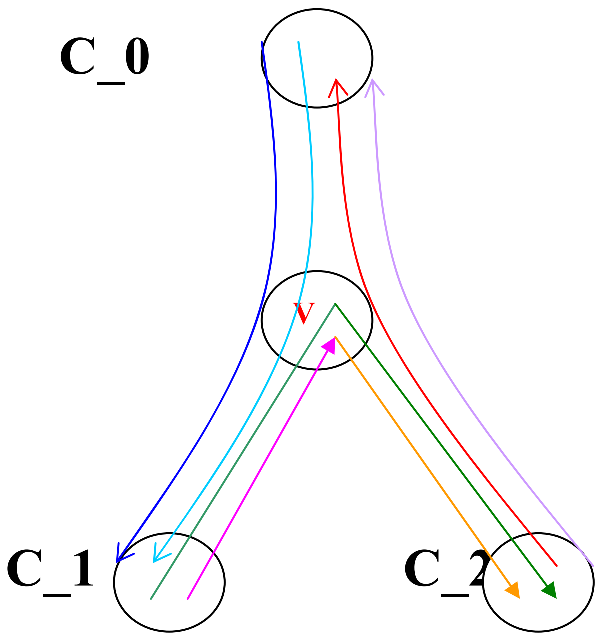


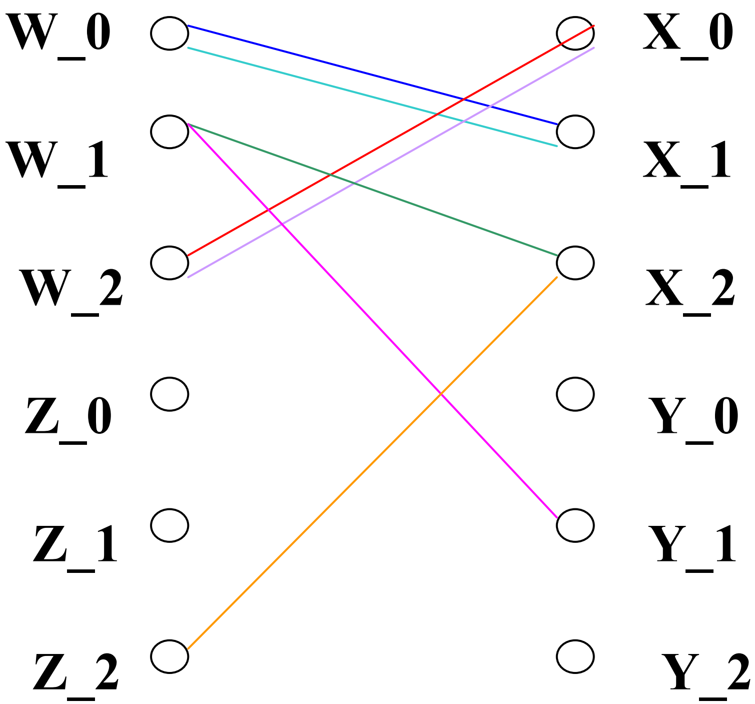
ΑΝΑΓΩΓΗ (3)................

Για κάθε μονοπάτι από το C_i σε κάποιο C_j θα έχουμε μια ακμή από το W_i στο X_j.

Για κάθε μονοπάτι από το C_i σε κάποιο V θα έχουμε μια ακμή από το W_i στο Y_i.

Για κάθε μονοπάτι από το V σε κάποιο C_j θα έχουμε μια ακμή από το Z_j στο X_j

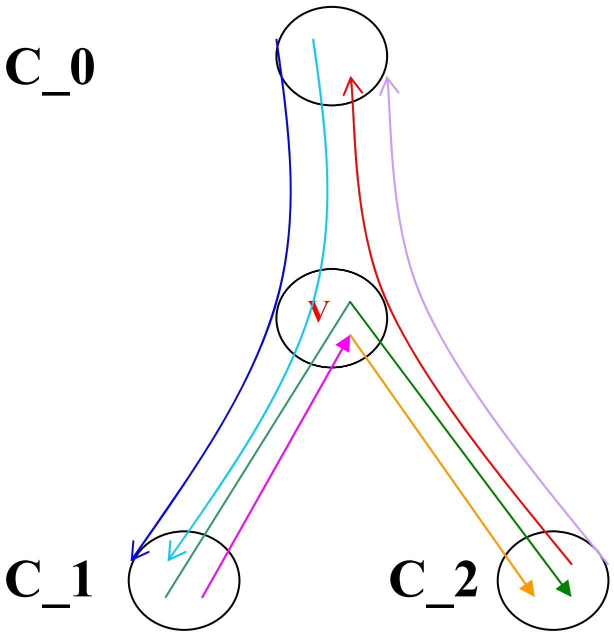


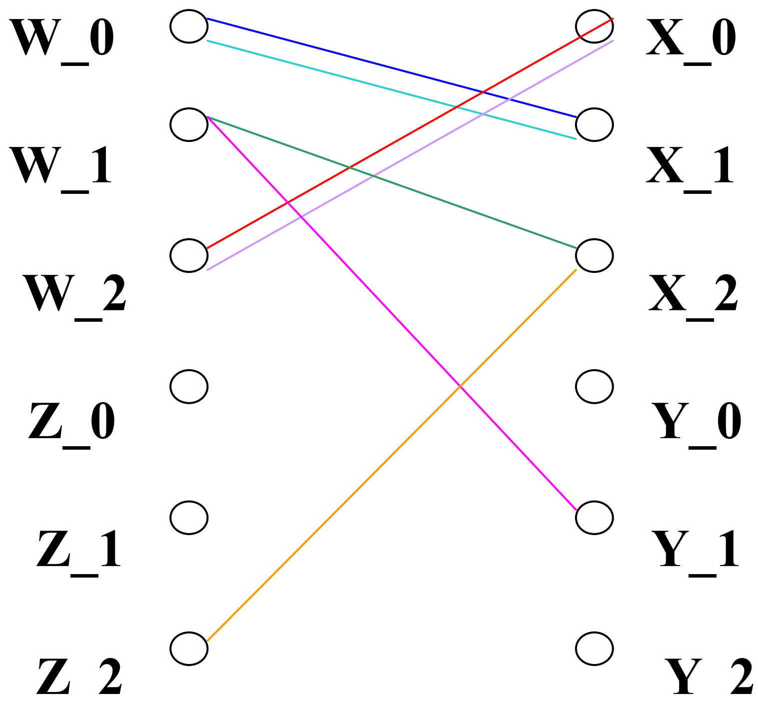


ΑΝΑΓΩΓΗ(4)..............

Δεν μπορούμε να έχουμε ακμή από κάποιο W_i σε X_i γιατι τότε στο δέντρο μας θα είχαμε ακμή από το C_i στον εαυτό του.

Δεν μπορούμε να έχουμε ακμή από κάποιο Z_i σε Y_i γιατι τότε στο δέντρο μας θα είχαμε ακμή από το V στον εαυτό του.

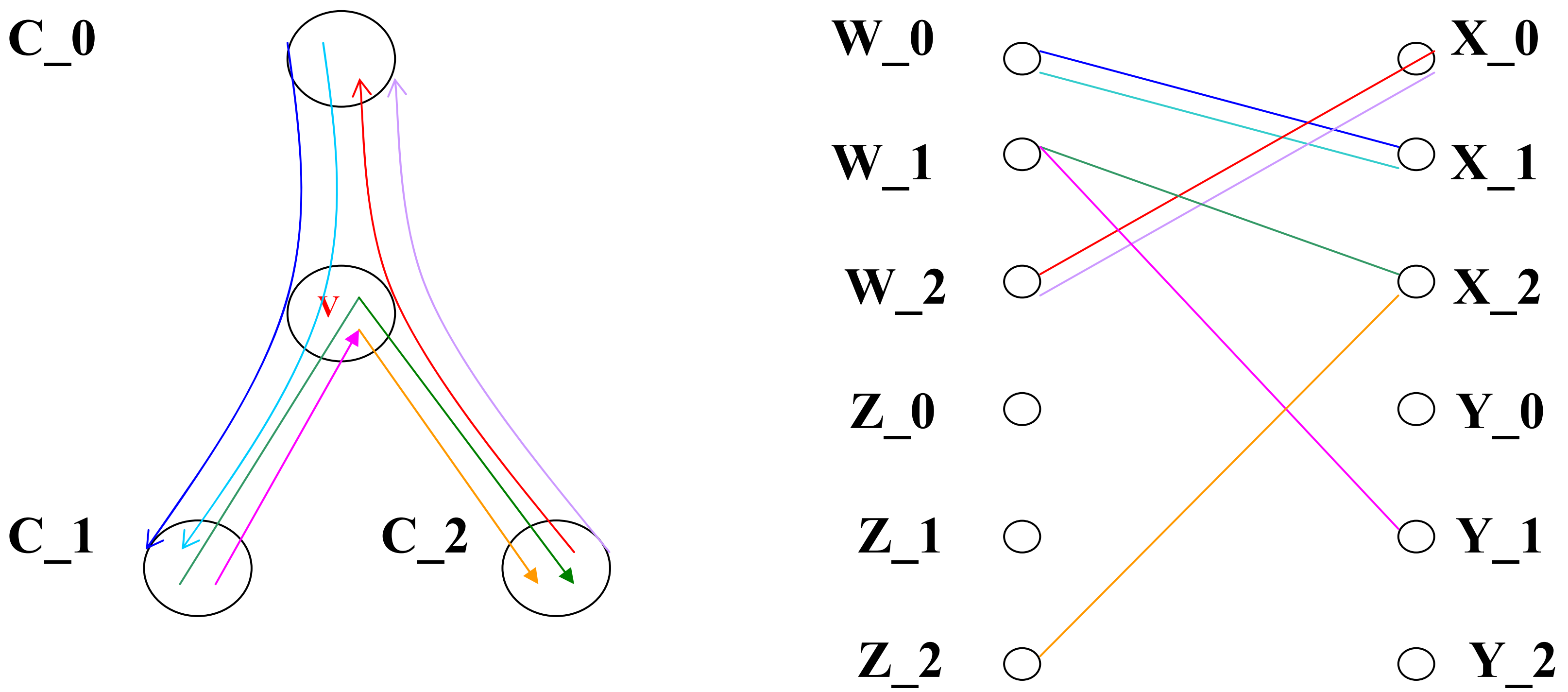




ΑΝΑΓΩΓΗ(5).............

Οταν ξεκινάει ακμή από κάποιο W_i σε Y τότε οπωσδήποτε θα καταλήγει σε Y_i γιατι σημαίνει ότι ξεκινάει από τον C_i και ότι καταλήγει στον V.

Οταν ξεκινάει ακμή από κάποιο Z_i σε X τότε οπωσδήποτε θα καταλήγει σε X_i γιατι σημαίνει ότι ξεκινάει από τον V και καταλήγει στον C_i.



ΑΝΑΓΩΓΗ(6)................

Ολες αυτές οι ακμές που δημιουργήσαμε ονομάζονται πραγματικές.

Αν παρατηρήσουμε το διμερή γράφο κάθε κόμβος W ή X έχουν βαθμό L.

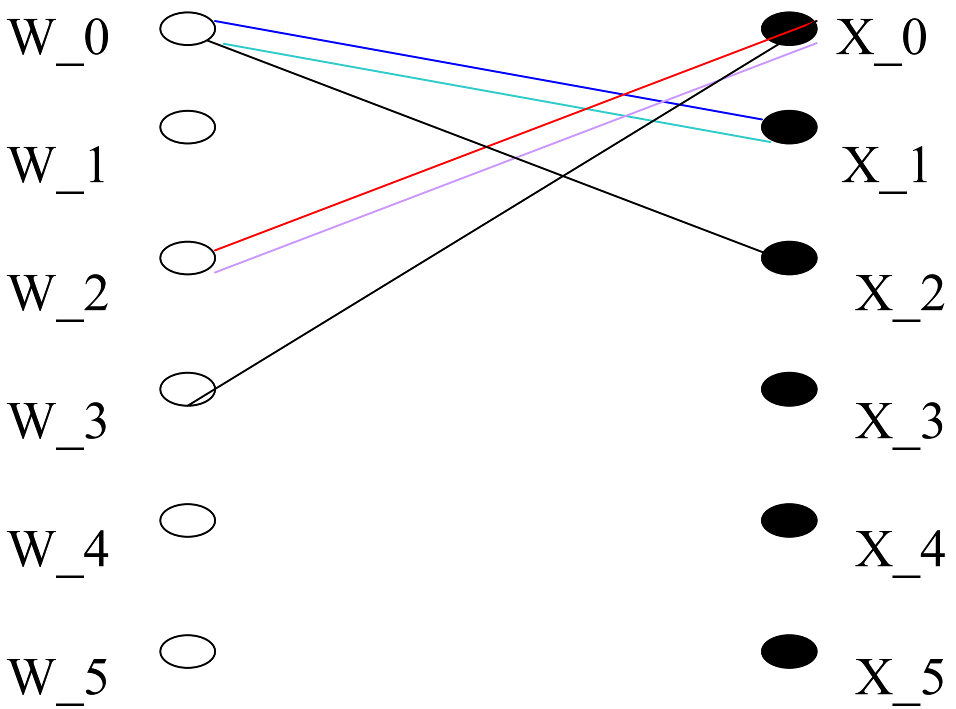
Αντίθετα οι κόμβοι Z ή Y δεν έχουν απαρίτητα βαθμό L.

Γι' αυτό και προσθέτουμε ακμές στο διμερές γράφο μας έτσι ώστε όλοι οι κόμβοι να έχουν βαθμό L. Οι ακμές αυτές που προσθέτουμε λέγονται fictitious (φανταστικές).

B. Ο αλγόριθμος (1)

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα L-κανονικό διμερές γράφο $G=(\{W_o,...,W_n\},\{X_0,...X_n\},E)$ όπου όλες οι ακμές δίπλα στον W_o ή στον X_o έχουν ήδη χρωματισθεί (γιατί ο κόμβος «0» στο αρχικό μας δέντρο θα έχει μικρότερο DF αριθμό) και τις οποίες τις ονομάζουμε **color-forced (δεδομένου χρώματος) ακμές**.

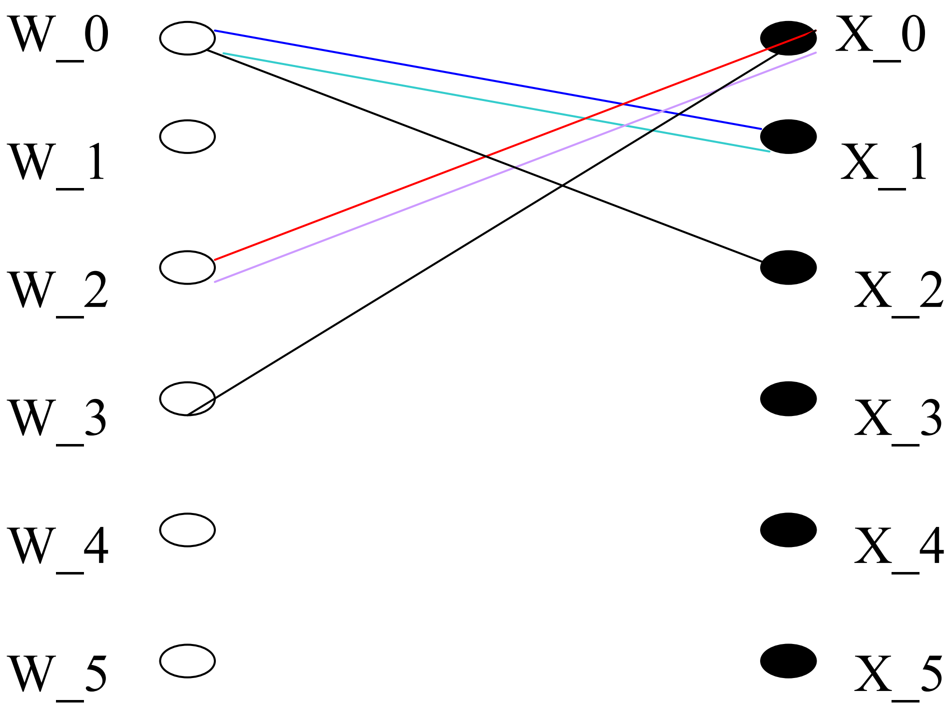
Οι κόμβοι $\{W_o,...,W_n\}$ ονομάζονται «άσπροι» κόμβοι ενώ οι $\{X_0,...X_n\}$ ονομάζονται «μαύροι».



Β. Ο αλγόριθμος (2)..........

Προφανώς όλες οι ακμές του γραφήματος συνδέουν κόμβους με διαφορετικό χρώμα.

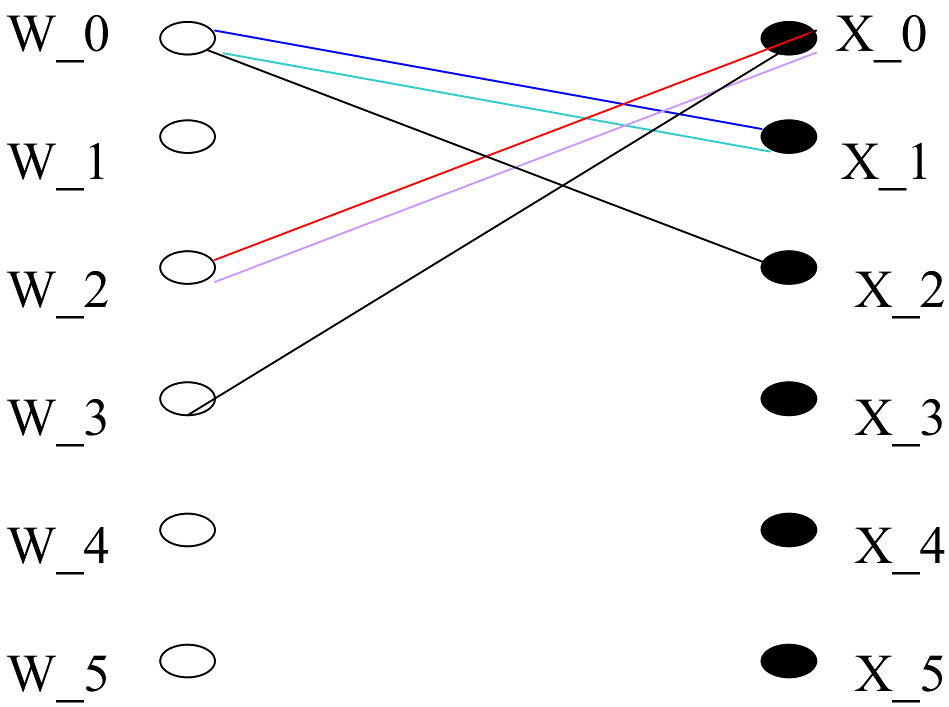
Είναι φανερό ότι καμμία ακμή δεν συνδέει δύο απέναντι κόμβους γιατί τότε θα είχαμε ακμή από ένα κόμβο στον εαυτό του στο κατευθυνόμενο δέντρο.



B. Ο αλγόριθμος (3)..........

Εάν ένα χρώμα εμφανίζεται σε μία μόνο **color-forced (δεδομένου χρώματος) ακμή** τότε το ονομάζουμε single color (μονό χρώμα).

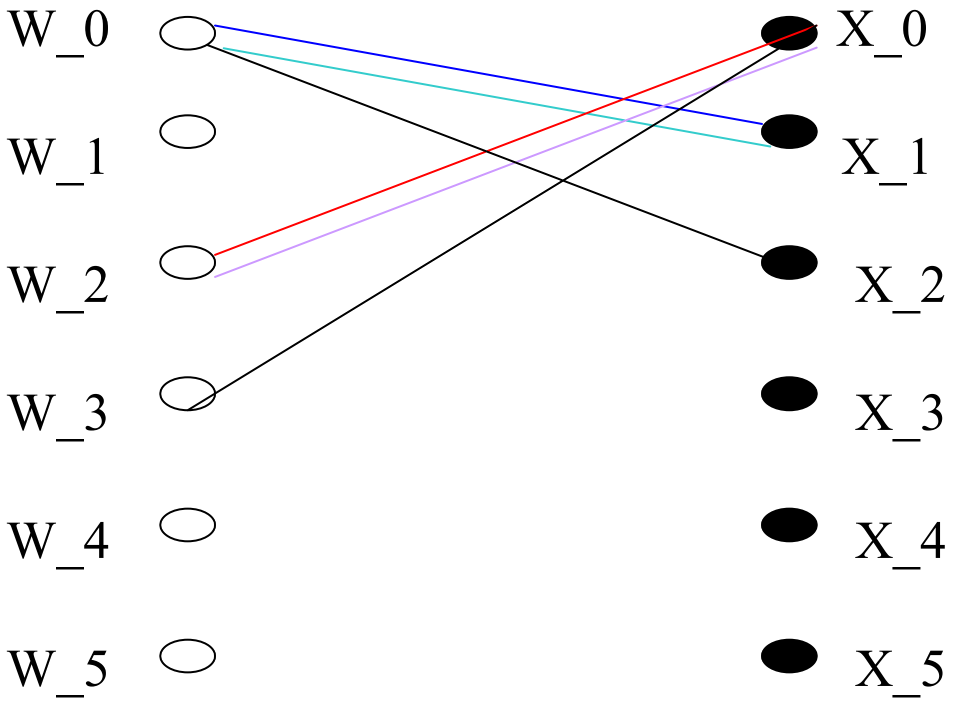
Εάν εμφανίζεται σε δύο **color-forced (δεδομένου χρώματος) ακμές** τότε το ονομάζουμε διπλό χρώμα. Παρατηρείστε ότι όταν έχουμε τέτοιες ακμές θα πρέπει η μία να ακουμπάει τον X_o και η άλλη τον W_o .



Β. Ο αλγόριθμος (4)..........

Προφανώς ένα χρώμα δεν μπορεί να εμφανίζεται παραπάνω από 2 φορές στο σύνολο των χρωμοδυναμικών ακμών.

Ονομάζουμε ένα ζευγάρι (W_i,X_i) απέναντι κόμβων ώς «γραμμή» και λέμε ότι αυτοί είναι «συνάδελφοι» ή «ζευγάρι».



Διπλά +Μονά Χρώματα = ?????

Δηλώνουμε ως D και S τον αριθμό των διπλών και μονών χρωμάτων αν/χα και ορίζουμε ως T το άθροισμα τους.

Δηλαδή: $T=D+S$

Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι σε κάθε κατευθυνόμενη ακμή θα έχουμε φορτίο L τότε θα ισχύει ότι

$$\mathbf{2D+S=2L}$$

οπότε: $\mathbf{D+T=2L}$

B1. Ο αριθμός T είναι ακριβώς 4/3L

Δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος γιατί θα χρωματίσουμε εμείς έτσι τον γράφο μας ώστε το T να είναι μικρότερο ή ίσο από 4/3L (Συνθήκη 2)

Σε περίπτωση που ο αριθμός T είναι μικρότερος από 4/3L μετατρέπουμε κάποιες από τις ακμές διπλού χρώματος σε μονές με το να αλλάξουμε κάποια χρώματα σε καινούργια και τρέχουμε τον αλγόριθμο.
Στο τέλος επαναφέρουμε τα χρώματα που αλλάξαμε στα αρχικά τους χρώματα και κάνουμε και κάποιες αντιμεταθέσεις χρωμάτων για μην έχουμε κάποιο «conflict».

B1. Ο αριθμός T είναι ακριβώς 4/3L (2)

Στην ουσία αυτό που θέλουμε να πετύχουμε είναι να εξισώσουμε τον αριθμό των μονών χρωμάτων με τον αριθμό των διπλών, δηλ:

$$D=S$$

Γιατί αφού συνολικά έχουμε 2L ακμές να χρωματίσουμε ισχύει:

$$2D+S=2L$$

Οπότε:

$$D+S=4L/3 \quad \text{ανν} \quad D=S$$

Αυτό σημαίνει ότι αυτό που θέλουμε να πετύχουμε είναι:

$$D=S=2L/3$$

B1. Ο αριθμός T είναι ακριβώς 4/3L .....(3)

Αρα αν ο D είναι μεγαλύτερος από τον S τότε μετατρέπουμε κάποια διπλά χρώματα σε μονά μέχρι να εξισώσουμε τους 2 αριθμούς.

Το αντίθετο δε γίνεται γιατί έχουμε χρωματίσει το γράφο μας έτσι ώστε T<=4/3L άρα D>=S (Συνθήκη 2)

Θυμόμαστε...

1. Εχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας σε μια ειδική περίπτωση χρωματισμού ακμών ενός L-κανονικού διμερή γράφου

2. Ειδική...γιατί θέλω να χρωματίσω το διμερή γράφο μου υπό κάποιες συνθήκες...

ΣΥΝΘΗΚΗ 1:

Ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων να είναι το πολύ 5/3 L χρώματα

ΣΥΝΘΗΚΗ 2:

Κάθε ζευγάρι από απέναντι πλευρές στο γράφο G_V να χρειάζεται το πολύ 4/3 L χρώματα.

Τι κάνουμε λοιπόν ?

Χωρίζουμε το L-κανονικό διμερή γράφο μας σε L perfect matchings, τα ταξινομούμε κατάλληλα και τα κατασκευάζουμε ομάδες των τριών (τριπλέτες).

Αρα θα έχουμε L/3 τριπλέτες....(θεωρούμε ότι το L διαιρείται με το 3)

Για κάθε τριπλέτα θα χρησιμοποιήσω ένα νέο χρώμα

Αρα L/3 νέα χρώματα ...

Μαζί με τα 4L/3 παλιά χρώματα ...

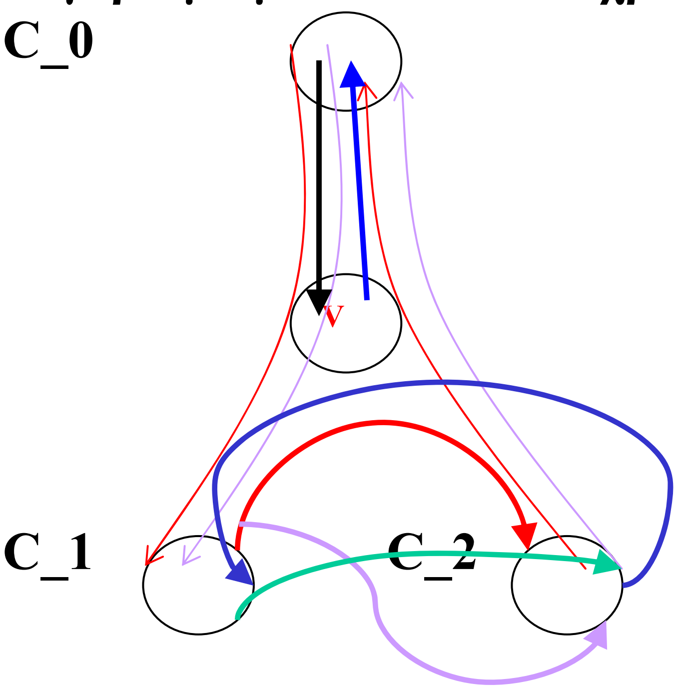
Σύνολο: 5L/3 χρώματα για όλο το διμερή γράφο μου

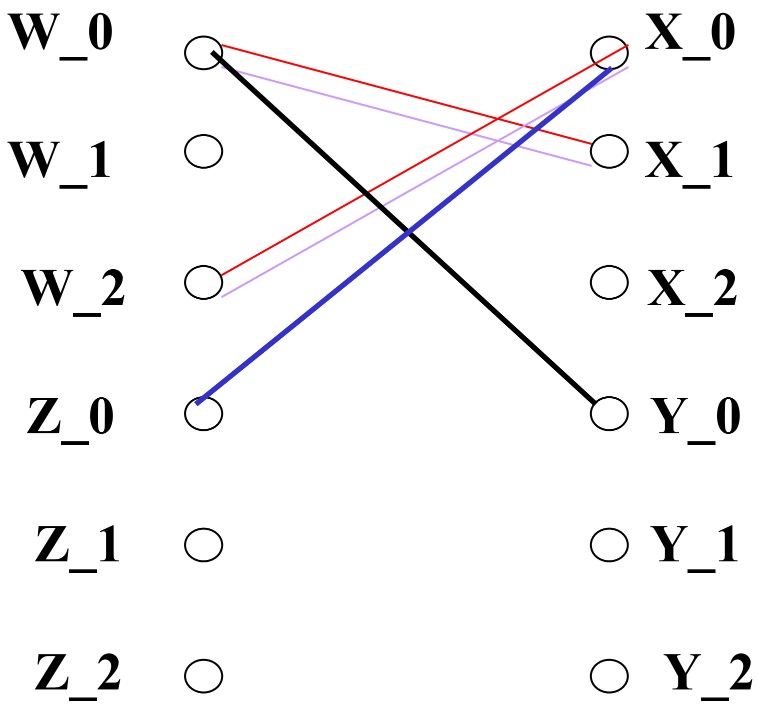
Στη συνέχεια συνεχίζω με τον επόμενο κόμβο μου...

Τι κάνουμε? (2).............(Πιο παραστατικά...)

Για τυχαίο κόμβο v «τρέχουμε» τον αλγόριθμο με είσοδο 4L/3 χρώματα, 2L/3 διπλά και 2L/3 μονά, και χρησιμοποιούμε μόνο L/3 νέα χρώματα.

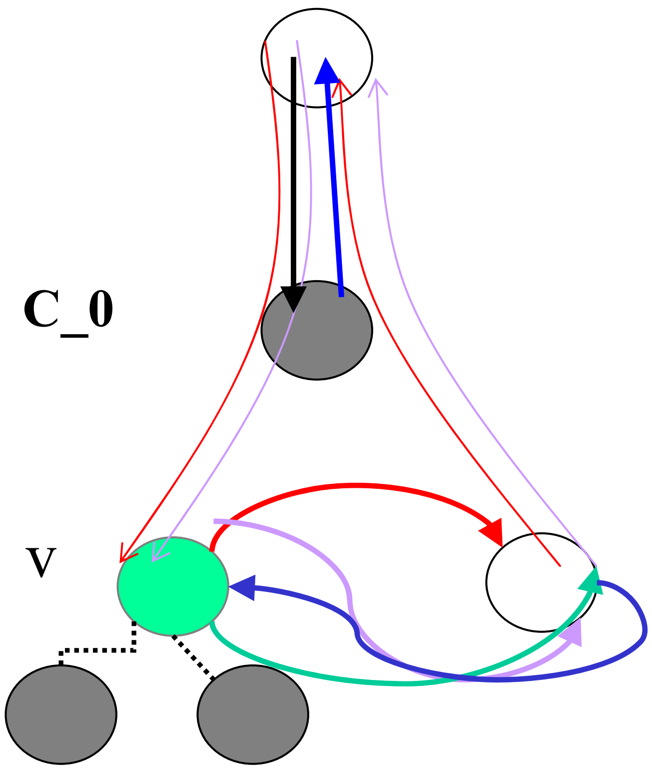
Στη συνέχεια με χρήση του DFS αλγορίθμου διαλέγουμε τον κόμβο με τον αμέσως επόμενο DF αριθμό και ξανατρέχουμε τον προηγούμενο αλγόριθμο με είσοδο 4L/3 χρώματα (λόγω της συνθήκης 2).

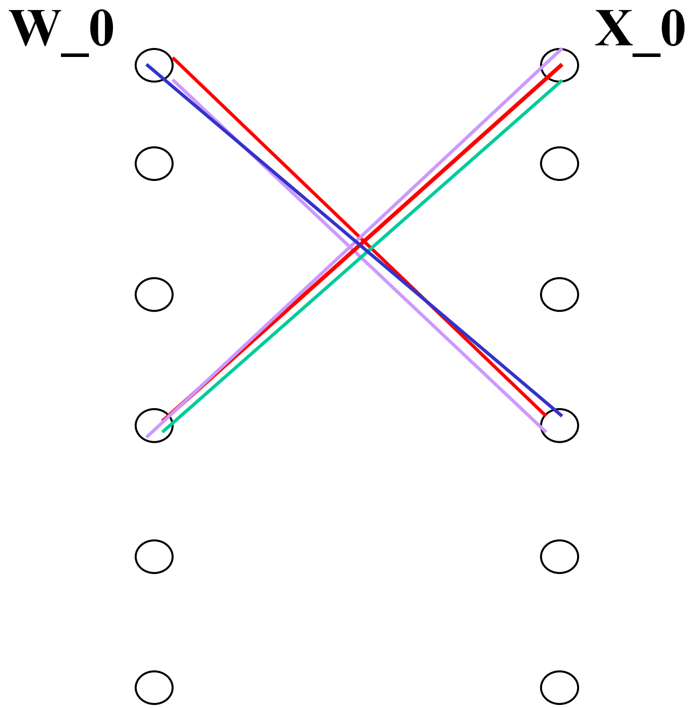




Τι κάνουμε? (3).............

Στον επόμενο κόμβο θα χρησιμοποιήσω πάλι 4/3L χρώματα από τα 5/3L που έχει η παλλέτα μου ως είσοδο και τα υπόλοιπα L/3 ως νέα....





Το τεχνικό μέρος της εργασίας..............

Τεχνικό Μέρος (Περιληπτικά.....) (1)

Χωρίζουμε το διμερή μας γράφο σε L-perfect matchings…

Κατηγοριοποιούμε τα ταιριάσματα σε 4 τύπους...(SS,TT,PP,TS)

Ταξινομούμε τα ταιριάσματα σε ακολουθίες (αλυσίδες ή κύκλους).

Διαλέγουμε από τις προηγούμενες ακολουθίες τριάδες ταιριασμάτων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και φτιάχουμε τριπλέτες...

Τεχνικό Μέρος (Περιληπτικά.....) (2)

Αρα αφού έχουμε L perfect matchings θα έχουμε L/3 τριπλέτες...

Σε κάθε τριπλέτα χρησιμοποιώ το πολύ ένα νέο χρώμα, άρα συνολικά L/3 νέα χρώματα για όλο το διμερή μου γράφο...

Μαζί με τα 4L/3 παλιά χρώματα που έχω ως είσοδο..

Σύνολο : 5L/3 χρώματα..............

B2. Χωρίζοντας το διμερή μας γράφο σε L-perfect matchings…

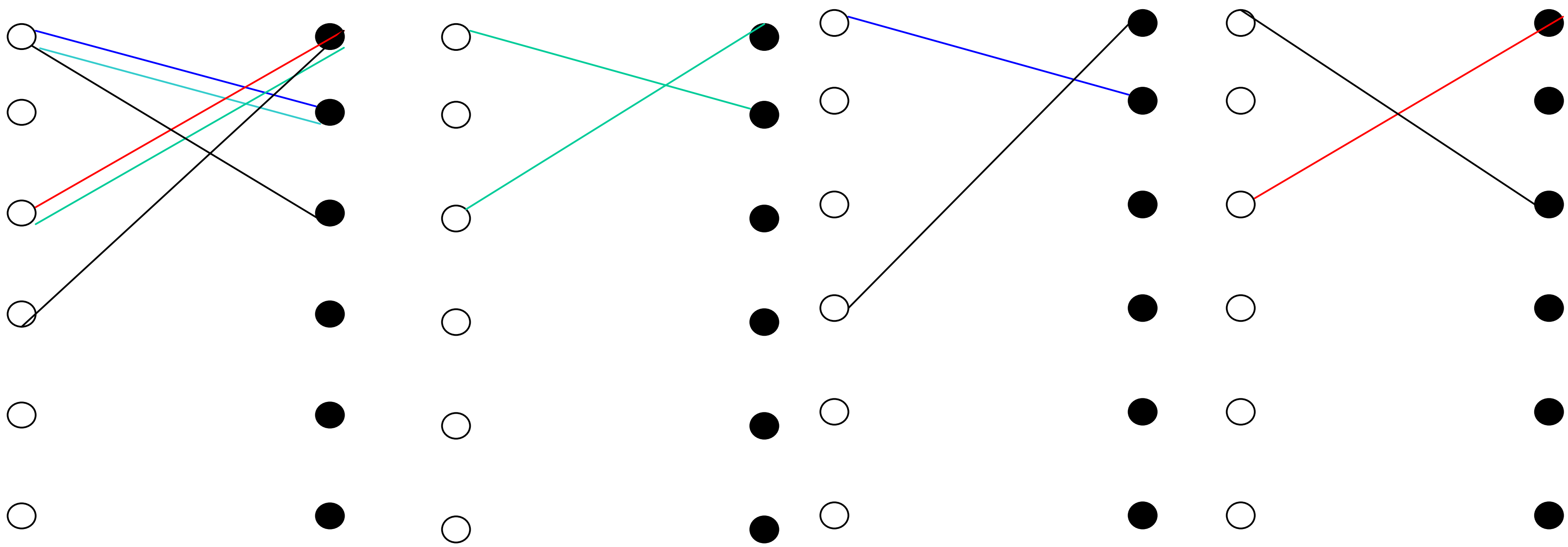
Αφου ο διμερές μας γράφος είναι L κανονικός μπορούμε να βρούμε L perfect matchings (τέλεια ταιριάσματα).

Κάθε τέτοιο ταίριασμα περιέχει ακριβώς 2 δεδομένου χρώματος ακμές. Μια που «ακουμπάει» τον W_o και μία τον X_o.

B2. Χωρίζοντας το διμερή μας γράφο σε L-perfect matchings… (2)

Ενα διπλό χρώμα είναι **διαχωριμένο** εάν οι δύο δεδομένου χρώματος του ακμές εμφανίζονται σε διαφορετικά ταιριάσματα..

Ενώ αν εμφανίζονται στο ίδιο ταίριασμα τότε λέμε το χρώμα αυτό **preserved.**



Κατηγοριοποιούμε τα ταιριάσματα σε τέσσερις τύπους:

TT όπου οι δύο δεδομένου χρώματος του ακμές χρωματίζονται με διαχωρισμένα χρώματα.

PP όπου οι δύο δεδομένου χρώματος του ακμές χρωματίζονται με preserved χρώματα.

SS όπου οι δύο δεδομένου χρώματος του ακμές χρωματίζονται με δύο μονά χρώματα.

TS όπου οι δύο δεδομένου χρώματος του ακμές χρωματίζονται με ένα διαχωρισμένο χρώμα και ένα μονό χρώμα.

Ταξινομούμε τα ταιριάσματα σε ακολουθίες (αλυσίδες ή κύκλους).

Χωρίζουμε τα ταιριάσματα σε ομάδες. Κάθε τέτοια ομάδα είναι είτε αλυσίδα είτε κύκλος από ταιριάσματα.

Αλυσίδα από ταιριάσματα είναι μια ακολουθία M_o, M_1, M_2,..,M_{l-1} από l ταιριάσματα τέτοια ώστε:

1. M_o και M_{l-1} είναι ταιριάσματα τύπου ST
2. M_1,...,M_{l-2} είναι ταιριάσματα τύπου TT
3. για κάθε $0 \le i \le l-2$, ταιριάσματα M_i και $M_{\iota+1}$ (δύο συνεχόμενα) μοιράζονται ακριβώς ένα διπλό (διαχωρισμένο) χρώμα.
4. Μια αλυσίδα αποτελείται τουλάχιστον από δύο ταιριάσματα.

π.χ: ST, TT, TT , ST με χρώματα s1 t1, t1 t2, t2 t3, t3 s2

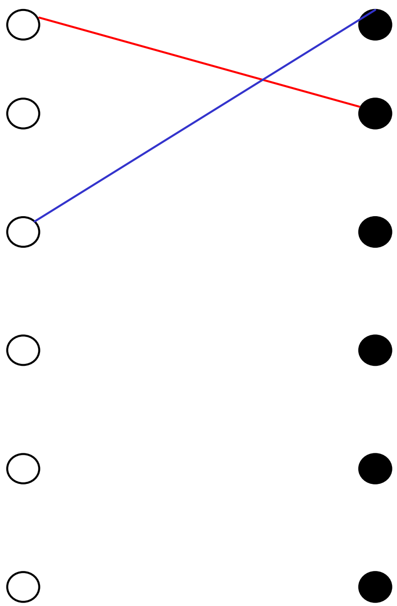
Ταξινομούμε τα ταιριάσματα σε ακολουθίες (αλυσίδες ή κύκλους) (2)

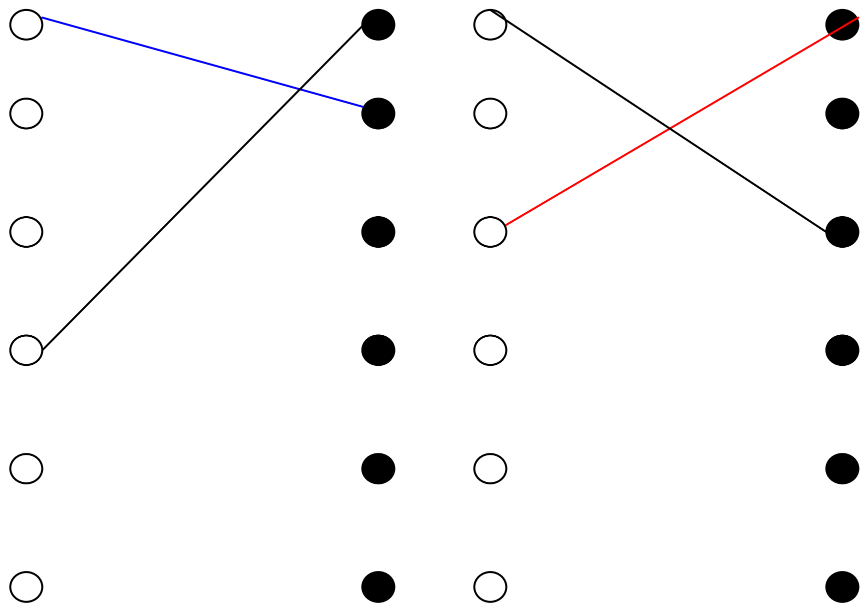
Κύκλος από ταιριάσματα είναι μια ακολουθία $<M_o, M_1, M_2,..,M_{l-1}>$ από l ταιριάσματα τύπου TT τέτοια ώστε, για κάθε ταίριασμα M_ι και $M_{\iota+1 mod l}$ να μοιράζονται ακριβώς ένα διπλό (διαχωρισμένο) χρώμα.

π.χ: TT, TT, TT με χρώματα t3 t1, t1 t2, t2 t3
π.χ: PP κύκλος μήκους 1

B4. Minimal Chains and Cycles

Μια ακολουθία από ταιριάσματα (είτε είναι αλυσίδα είτε είναι κύκλος) είναι ελάχιστη εάν δεν περιέχει παράλληλες δεδομένου χρώματος ακμές.
Μια ακολουθία από ταιριάσματα που δεν είναι ελάχιστη μπορεί να διασπαστεί σε δύο μικρότερες ακολουθίες. Ετσι μπορούμε να διασπάσουμε μια ακολουθία σε καινούργιες οι οποίες είναι όλες ελάχιστες.





B5. **Συνδέουμε τις τριπλέτες**

Χωρίζουμε όλα τα ταιριάσματα σε ομάδες των τριών τις οποίες ονομάζουμε **τριπλέτες.**

Κάθε τέτοια τριπλέτα έχει έξι δεδομένου χρώματος ακμές, δύο από τις οποίες αποτελούνται από μονά χρώματα ενώ οι υπόλοιπες από διπλά**.**

Επεξεργαζόμαστε τις τριπλέτες ως εξής:

B5. Συνδέουμε τις τριπλέτες (2)

Πρώτα θεωρούμε όλες τις **αλυσίδες μήκους 3** ή μεγαλύτερου.

Από κάθε τέτοια αλυσίδα **C=**<M_o, M_1, ..,M_{l-1}> χρησιμοποιούμε τα δύο πρώτα ταιριάσματα M_o, M_1 και το τελευταίο M_{l-1}.

Μ'αυτόν τον τρόπο οι τριπλέτες που διαλέγουμε αποτελούναι από 2 ST ταιρίασματα (M_o, M_{l-1}) και από ένα TT ταίριασμα.(M_1).

Οι δεδομένου χρώματος ακμές χρωματίζονται με 2 μονά χρώματα s_o και s_1 και με 3 διαφορετικά διπλά $d_{1,}$ d_2,d_{l-1}, όπου d_1 είναι το κοινό (διπλό) χρώμα μεταξύ των M_o και M_1.

B5. Συνδέουμε τις τριπλέτες (3)

Τώρα μας έχουν μείνει αλυσίδες μήκους 2, «γυμνές αλυσίδες» (δηλαδή ότι έμεινε από τις αλυσίδες τύπου 3 και πάνω), κύκλοι και SS ταιρίασματα.

τι έγιναν τα PP ταιριάσματα;;;

είναι κύκλοι μήκους 1

Θεωρούμε αρχικά κύκλους άρτιου μήκους και «γυμνές αλυσίδες» και κατασκευάζουμε τριπλέτες όπου η κάθε μία αποτελείται από δύο συνεχόμενα TT ταιριάσματα από τον ίδιο κύκλο ή την ίδια «γυμνή αλυσίδα» και από ένα SS ταίριασμα.

Β5. Συνδέουμε τις τριπλέτες (4)

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για περιττούς κύκλους και «γυμνές αλυσίδες».

Στην περίπτωση αυτή όμως θα περισσέψει ένα ΤΤ ταίριασμα («leftover matching»).

Οπότε χρησιμοποιούμε ένα SS ταίριασμα με δύο τέτοιου είδους ΤΤ ταιριάσματα

Τελικά εάν δεν μας φτάσουν τα SS ταιριάσματα χρησιμοποιούμε τα ST που βρίσκονται σε αλυσίδες μήκους 2.

B5. **Συνδέουμε τις τριπλέτες (5)**

Ολα τα ταιριάσματα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τέτοιες τριπλέτες. (Σύνολο 1/3L τριπλέτες όπου η κάθε μία περιέχει 4 διπλά και 2 μονά παλιά χρώματα)

Θα χρωματίσουμε τα ταιριάσματα έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

ΣΥΝΘΗΚΗ 1: Ο αριθμός των νέων χρωμάτων να είναι το πολύ D/2(δηλ.L/3)
Αυτό μπορεί να γίνει με το να χρησιμοποιούμε για κάθε τριπλέτα ένα μόνο νέο χρώμα.

ΣΥΝΘΗΚΗ 2: Κάθε γραμμή να «βλέπει» το πολύ 4/3L χρώματα.(Ετσι ώστε το Τ να μην υπερβαίνει το 4L/3).

ΛΗΜΜΑ : Από τη συνθήκη 1 συνεπάγεται ότι ο ολικός αριθμός των χρωμάτων είναι 5/3L.

Αποδειξη:

Συνολικός αριθμός χρωμάτων= Παλιά + Καινούργια =

T+D/2 =

4/3L + 1/3L =

5/3L

B6. Θέτοντας τα ενεργά χρώματα

Χρωματίζουμε κάθε τριπλέτα ξεχωριστά **με τέσσερα από τα παλιά χρώματα** που εμφανίζονται στις δεδομένου χρώματος ακμές της τριπλέτας και σε μερικές περιπτώσεις χρησιμοποιούμε ένα νέο χρώμα.

Τα τέσσερα παλιά χρώματα που χρησιμοποιούνται ονομάζονται **ενεργά χρώματα** και περιέχουν τα δύο μονά χρώματα της τριπλέτας.

Τα εναπομείναντα δύο ενεργά χρώματα επιλέγονται ανάμεσα στα διπλά χρώματα της τριπλέτας έτσι ώστε κάθε διπλό χρώμα να είναι ενεργό για ακριβώς μία τριπλέτα.

Κάτι το οποίο μπορεί να γίνει γιατί υπενθυμίζουμε ότι έχουμε L/3 τριάδες και 2/3L διπλά (διαφορετικά) χρώματα

Β6. Θέτοντας τα ενεργά χρώματα (2)

Ακόμη χρωματίζουμε την τριπλέτα έτσι ώστε κάθε «γραμμή» που «βλέπει» το νέο χρώμα της τριπλέτας να μην βλέπει κάποιο από τα ενεργά χρώματα της τριπλέτας**.**

(Αρα χρησιμοποιούμε 7 χρώματα το πολύ σε κάθε τριπλέτα- 2μονά, 2 ενεργά διπλά, και εάν ένα νέο τότε δεν χρησιμοποιούμε κάποιο από τα 4 ενεργά.)

B6. Θέτοντας τα ενεργά χρώματα (3)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Να χρωματίσουμε τη γραμμή της τριπλέτας με τα τέσσερα «παλιά» - ενεργά χρώματα (2 μονά , 2 από τα διπλά). Αρα εάν είχαμε μόνο μια τριπλέτα τότε για να χρωματίσουμε κάθε γραμμή θα χρησιμοποιήσουμε 4 χρώματα . Δηλαδή ισχύει η συνθήκη 2 όπου θέλουμε το πολύ 4/3L χρώματα τώρα που έχουμε L/3 τριπλέτες.

1^{o} matching	2^{o} matching	3^{o} matching
S1 **D1**	**S2** **D2**	**S1** **S2**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Να χρωματίσουμε τη γραμμή της τριπλέτας με κάποιο νέο χρώμα W. Τότε χρωματίζουμε τη γραμμή χωρίς να χρησιμοποιήσουμε κάποιο από τα τέσσερα ενεργά. (2 μονά , 2 από τα διπλά). Αρα και πάλι θα ισχύει η συνθήκη 2 (όπου θέλουμε το πολύ 4/3L χρώματα σε κάθε γραμμή).

1^{o} matching	2^{o} matching	3^{o} matching
W **D1**	**S1** **W**	**S2** **W**

2 ΜΟΝΑ & 2 ΔΙΠΛΑ ΑΛΛΑ ΠΟΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ?

1. Για leftover matchings… Εστω τριπλέτα (S, T_1,T_2) ...Τοτε:

   τα 2 μονά του S (S1,S2)

   το διπλό του T1 που ξεκινάει από το W_0

   το διπλό του T2 που καταλήγει στο X_0

2. Για τριπλέτα (S,T_3,T_4) ... Όπου τα δύο συνεχόμενα TT ταιριάσματα έχουν προέλθει από τον ίδιο κύκλο ή την ίδια «γυμνή αλυσίδα» όπως και το T_1 ...
   τα δύο μονά
   τα χρώματα των αναγκαστικών ακμών που «ακουμπάνε» τον κόμβο W_o στα ταιριάσματα T_3 και T_4.

2 ΜΟΝΑ & 2 ΔΙΠΛΑ ΑΛΛΑ ΠΟΙΑ ΑΚΡΙΒΩΣ? (2)

3. Για τριπλέτα (S,T_3,T_4) ... Όπου τα δύο συνεχόμενα ΤΤ ταιριάσματα έχουν προέλθει από τον ίδιο κύκλο ή την ίδια «γυμνή αλυσίδα» όπως και το Τ2 ...

τα δύο μονά
τα χρώματα των αναγκαστικών ακμών που «ακουμπάνε» τον κόμβο X_o στα ταιριάσματα T_3 και T_4.

4. Για τριπλέτες που αποτελούνται από 2 ΤΤ ταιριάσματα τα οποία ανήκουν σε άρτιου μήκους κύκλους ή αλυσίδας (οπότε δεν θα περιέχουν leftover ΤΤ ταιριάσματα)
τα δύο μονά παλιά χρώματα της τριπλέτας
μαζί με τα χρώματα των δύο αναγκαστικών ακμών που ακουμπάνε είτε το W_o είτε το X_o.

B7. Χρωματισμός των τριπλετών

Για να χρωματίσουμε τις τριπλέτες τις χωρίζουμε σε τέσσερις κατηγορίες:

ΤΥΠΟΥ Α: όπου περιέχονται όλες οι τριπλέτες οι οποίες αποτελούνται από ένα SS ταίριασμα και δύο leftover TT ταιριάσματα.

Μια ειδική περίπτωση τύπου Α είναι η περίπτωση όπου μια τριπλέτα αποτελείται από τουλάχιστον ένα PP ταιριάσμα το οποίο μπορούμε να το θεωρήσουμε ως το leftover ταίριασμα ενός κύκλου μήκους 1.

ΤΥΠΟΥ Β: όπου περιέχονται όλες οι τριπλέτες οι οποίες αποτελούνται από ένα SS ταίριασμα και δύο συνεχόμενα TT ταιριάσματα από τον ίδιο κύκλο ή αλυσίδα.

Μια ειδική περίπτωση τριπλέτας τύπου Β έχουμε όταν χρησιμοποιήσουμε 2 TT ταιριάσματα τα οποία αποτελούν κύκλο μήκους 2.

Β7. Χρωματισμός των τριπλετών (2)

ΤΥΠΟΥ C: Αυτά είναι ταιριάσματα τα οποία αποτελούνται από 2 ST ταιριάσματα τα οποία αποτελούν μια αλυσίδα μήκους 2 και από ένα TT ταίριασμα.

Ειδική περίπτωση τύπου C έχουμε όταν ένα TT ταίριασμα είναι PP ταίριασμα.

ΤΥΠΟΥ D: Αυτές είναι τριπλέτες οι οποίες δημιουργήθηκαν από αλυσίδες από τις οποίες χρησιμοποιήσαμε τα δύο πρώτα ταιριάσματα (ένα ST και ένα TT) και το τελευταίο (ένα ST ταίριασμα).

Ειδική περίπτωση όταν μια αλυσίδα έχει μήκος ακριβώς 3.

Χρωματίζοντας τριπλέτες τύπου Β

Θεωρούμε τριπλέτα $R=(S,T_1,T_2)$ τύπου Β, όπου $T1=(x,y)$ και $T2=(y,z)$ και $S=(s1,s2)$.

Υπενθυμίζουμε ότι τα s1και s2 είναι μονά χρώματα και τα x,y,z είναι διπλά χρώματα και ας υποθέσουμε ότι τα ενεργά χρώματα της R είναι τα s1,s2, x και y.

Ας προσέξουμε ότι οι color-forced ακμές που είναι χρωματισμένες με τα x,y ή z δεν μπορεί να είναι παράλληλες αφού τα T1, T2 ανήκουν στον ίδιο ελάχιστο κύκλο ή αλυσίδα.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $x \neq z$ δηλ. θεωρούμε ότι δεν είμαστε στην ειδική περίπτωση όπου τα T1, T2 αποτελούν κύκλο μήκους 2.

Χρωματίζοντας τριπλέτες τύπου Β (2)

Θεωρούμε ότι τα S και T1 είναι κυκλικό κάλυμα του διμερή μας γράφου και ότι το κυκλικό κάλυμά μας αποτελείται ακριβώς από 1 κύκλο...

Ξεκινάμε με το να ξεχωρίσουμε 2 περιπτώσεις:

1. Η ελεύθερη color-forced ακμή e_x είναι παράλληλη στην e_{s_2}
2. **Οχι η 1.**

Περίπτωση 1: Μη Παράλληλη ...

Χρησιμοποιούμε το x για να χρωματίσουμε την ακμή (u,v) η οποία είναι δίπλα στην e_{s_2} στο κυκλικό κάλυμα και τα s1,s2 εναλλάξ για τις ακμές του κυκλικού καλύματος που παραμένουν αχρωμάτιστες.

Τι σημαίνει ελεύθερη color-forced ακμή e_x ;

Είναι η color-forced ακμή χρώματος x η οποία δεν ανήκει στη τριπλέτα μας αλλά αφού το x είναι διπλό διαχωρισμένο χρώμα θα πρέπει να υπάρχει ένα matching στο οποίο θα έχουμε μία από τις color-forced ακμές του χρωματισμένη με αυτό το χρώμα.

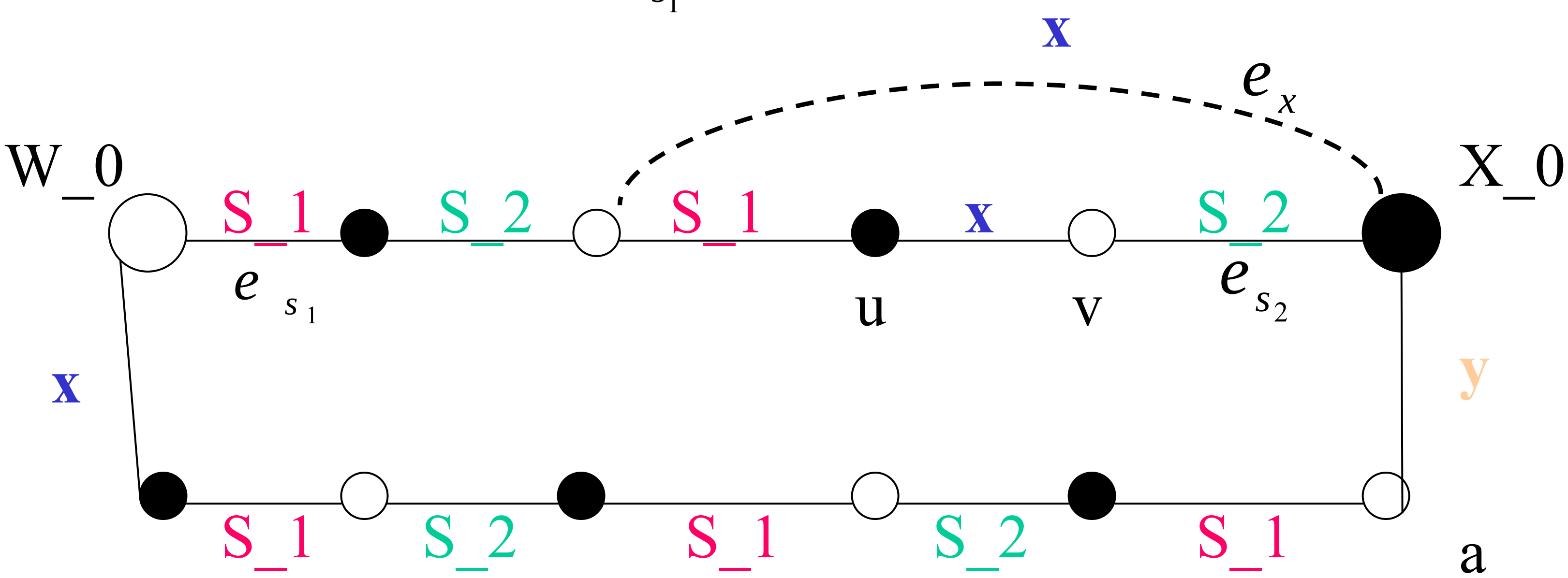
Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (1);

Η ελεύθερη color-forced ακμή e_x συνδέει τον κόμβο X_o με έναν άσπρο κόμβο διαφορετικό από τον v.(Προφανώς διαφορετικό και από τον u αφού είναι μαύρος κόμβος).

Ετσι ούτε ο u αλλά ούτε και ο v είναι δίπλα σε ακμή με χρώμα x.

Επίσης ο αριθμός των ακμών μεταξύ W_0 και X_0 είναι περιττός (Αφού πάμε σε περιττό αριθμό βημάτων από κάποιον άσπρο κόμβο σε κάποιον μαύρο).

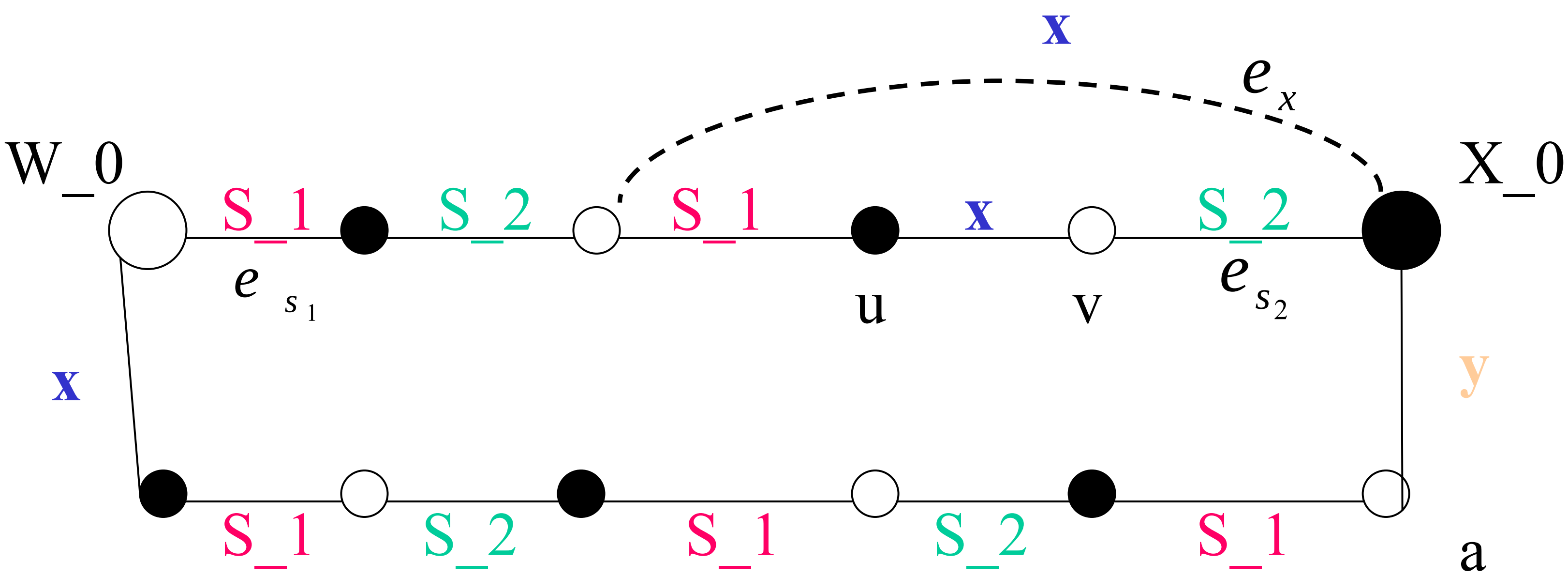
Ετσι με το να χρωματίσουμε την (u,v) με χρώμα x και τις υπόλοιπες με τα s1, s2 εναλλάξ, η ακμή δίπλα στην e_{s_1} θα χρωματισθεί με το χρώμα s2.



Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (2);

Οι ακμές του Τ2 οι οποίες δεν είναι χρωματισμένες τις χρωματίζουμε με το ενεργό χρώμα y (το οποίο ως τώρα το έχουμε χρησιμοποιήσει μόνο για την color-forced ακμή του Τ1 που ενώνει έστω τον κόμβο a με τον X_0) εκτός φυσικά από την ακμή (α,b).Οπου b είναι ο κόμβος στο matching T2 όπου ενώνεται με τον a και προφανώς δεν μπορεί να είναι ο X_0 γιατί οι T1, T2 δεν έχουν παράλληλες ακμές (color-forced).

θα δείξουμε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε την ακμή (a,b) με χρώμα x ή s2.



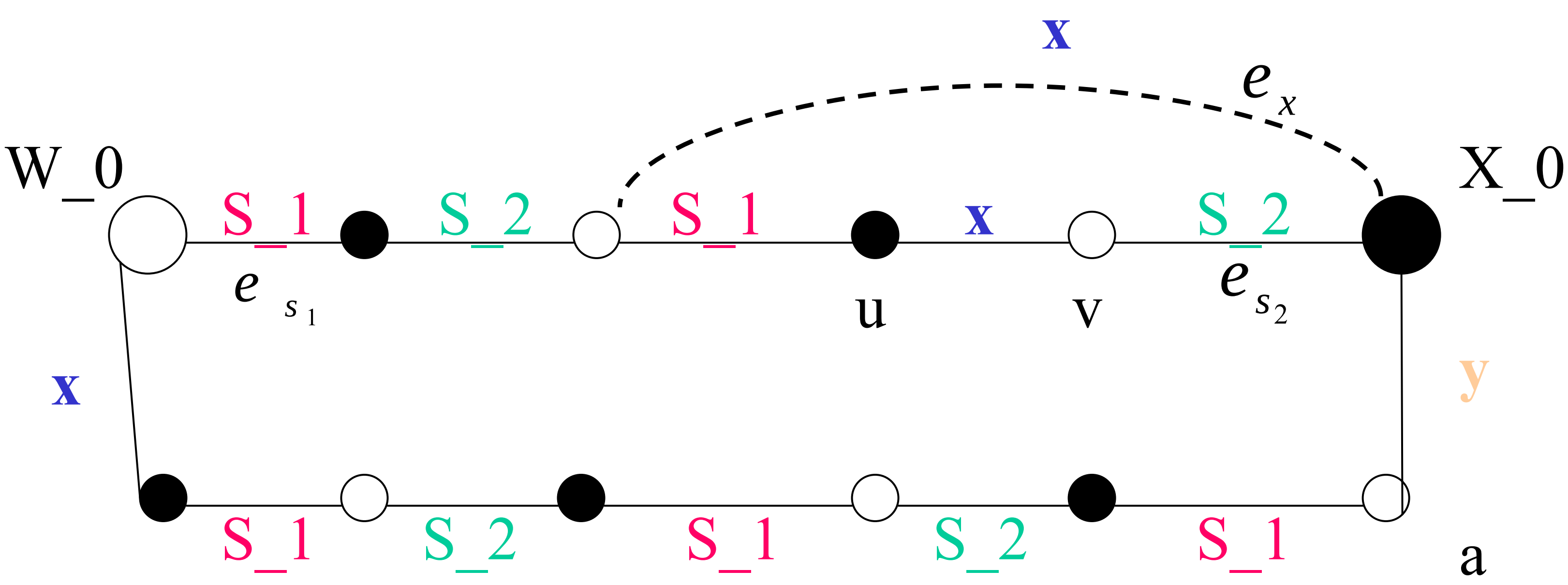
Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (3);

θα δείξουμε ότι μπορούμε να χρωματίσουμε την ακμή (a,b) με χρώμα x ή s2.

Παρατηρούμε ότι ο a «βλέπει» τα y και s_1.Οπότε αν ο b δεν «βλέπει» το χρώμα x μπορούμε να χρωματίσουμε την ακμή (a,b) με x.

Αν τώρα ο b «βλέπει» το χρώμα x υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

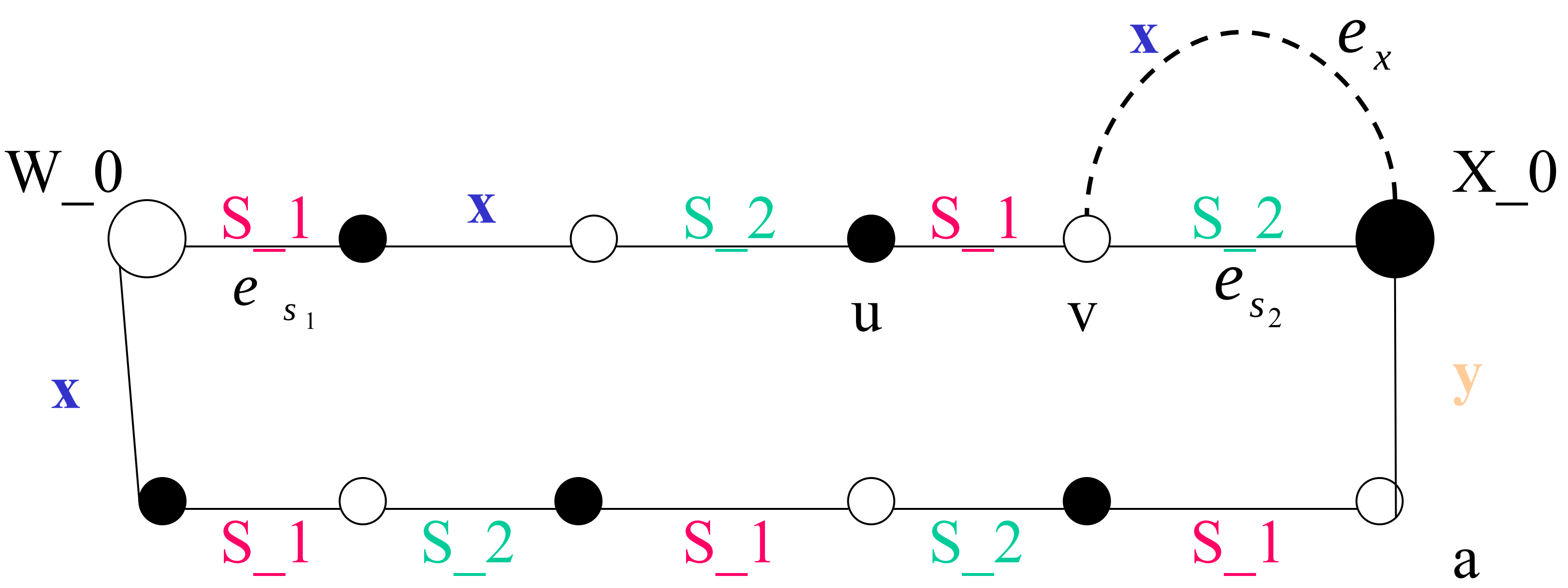
1. Να είναι ο u
2. Να είναι ο κόμβος δίπλα στον W_0.



Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (4);

Περίπτωση 2: Παράλληλη.....

Αν μεταξύ των e_{s_1} και e_{s_2} υπάρχουν παραπάνω από μία ακμές χρωματίζουμε με x την ακμή δίπλα στην e_{s_1} και στη συνέχεια πάμε εναλλάξ (s2,s1).

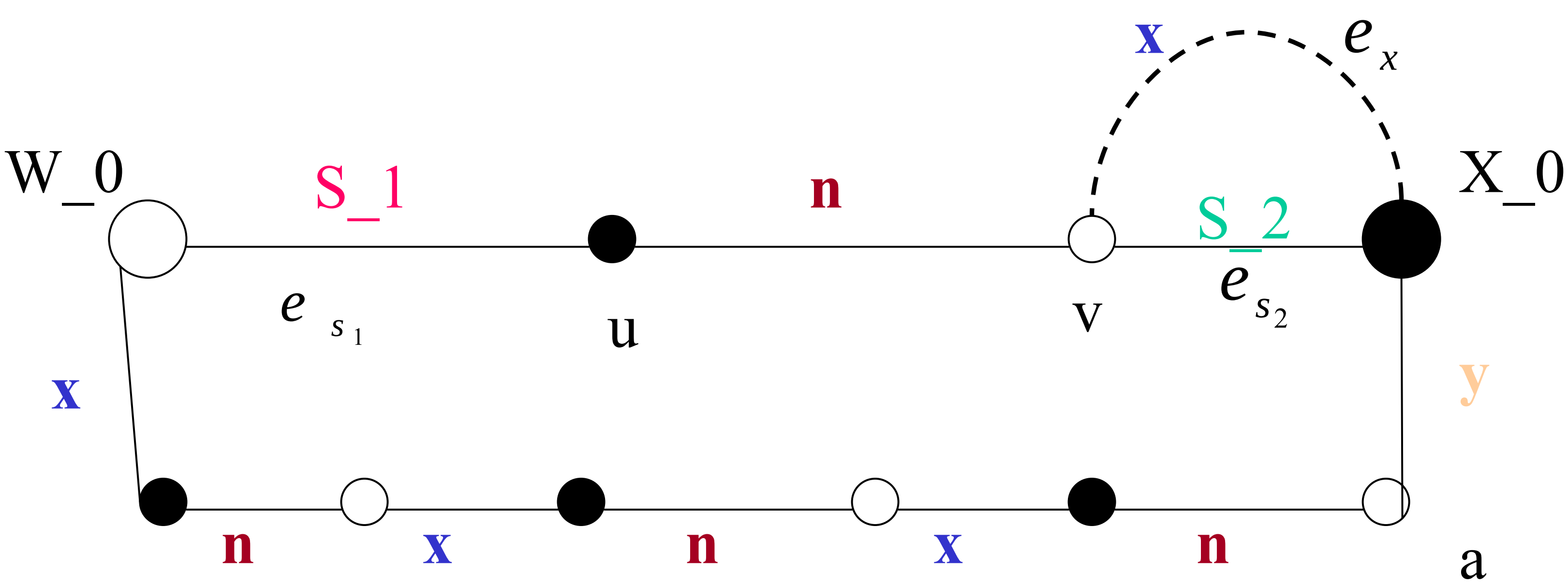


Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (5);

Περίπτωση 2: Παράλληλη..... (β)....

Αν μεταξύ των e_{s_1} και e_{s_2} υπάρχει μόνο μία ακμή χρωματίζουμε την ακμή αυτή με το νέο χρώμα που έχουμε δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε **(έστω n)**.

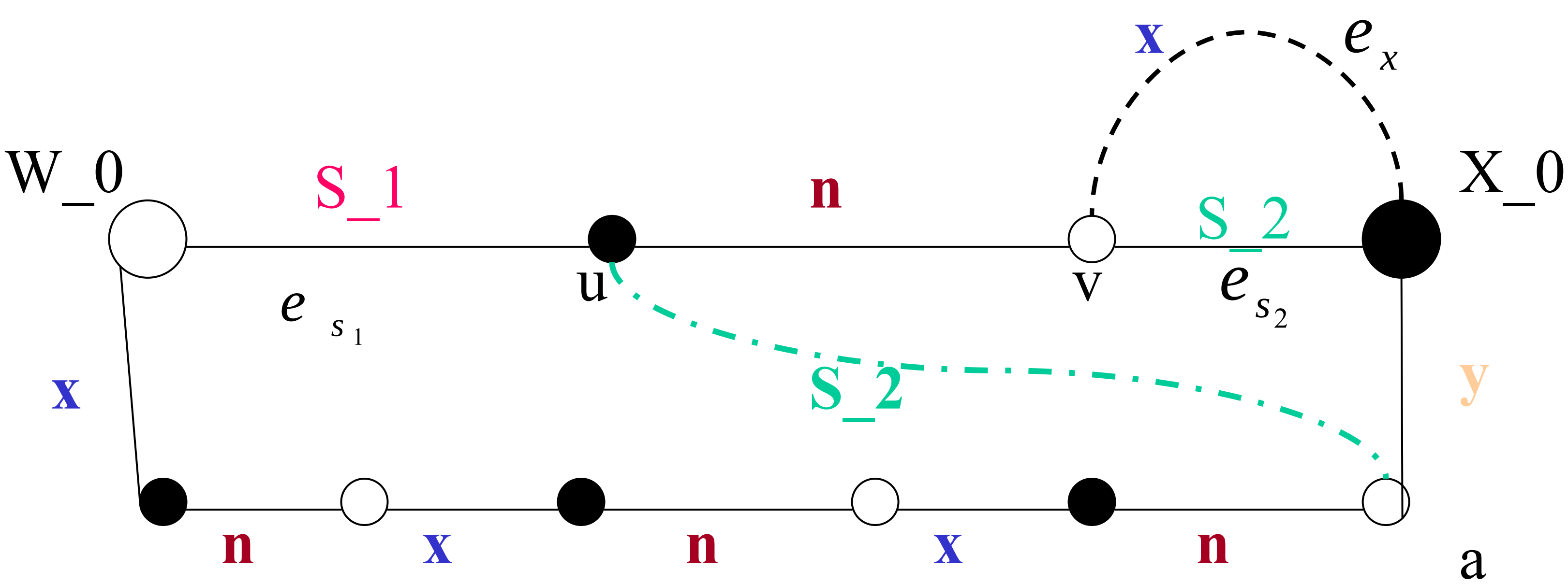
Χρησιμοποιούμε τα χρώματα **n**, **x** για να χρωματίσουμε τις υπόλοιπες ακμές που έχουν μείνει αχρωμάτιστες (Πάμε εναλλάξ προφανώς).



Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (6);

Περίπτωση 2: Παράλληλη..... (γ)....

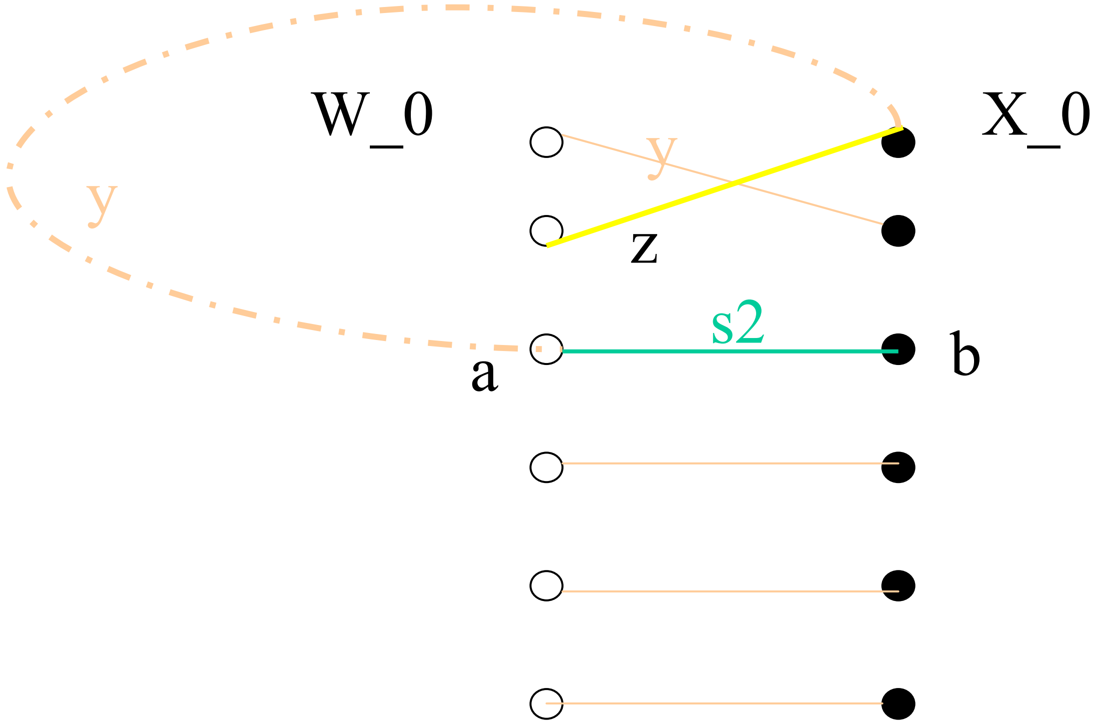
Για να χρωματίσουμε το matching T2 χρησιμοποιούμε το χρώμα y εκτός φυσικά απο την (a,b) όπου θα χρησιμοποιήσουμε το **s2.**



Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (7);

Περίπτωση 2: Παράλληλη..... (δ)....

T2 Matching …

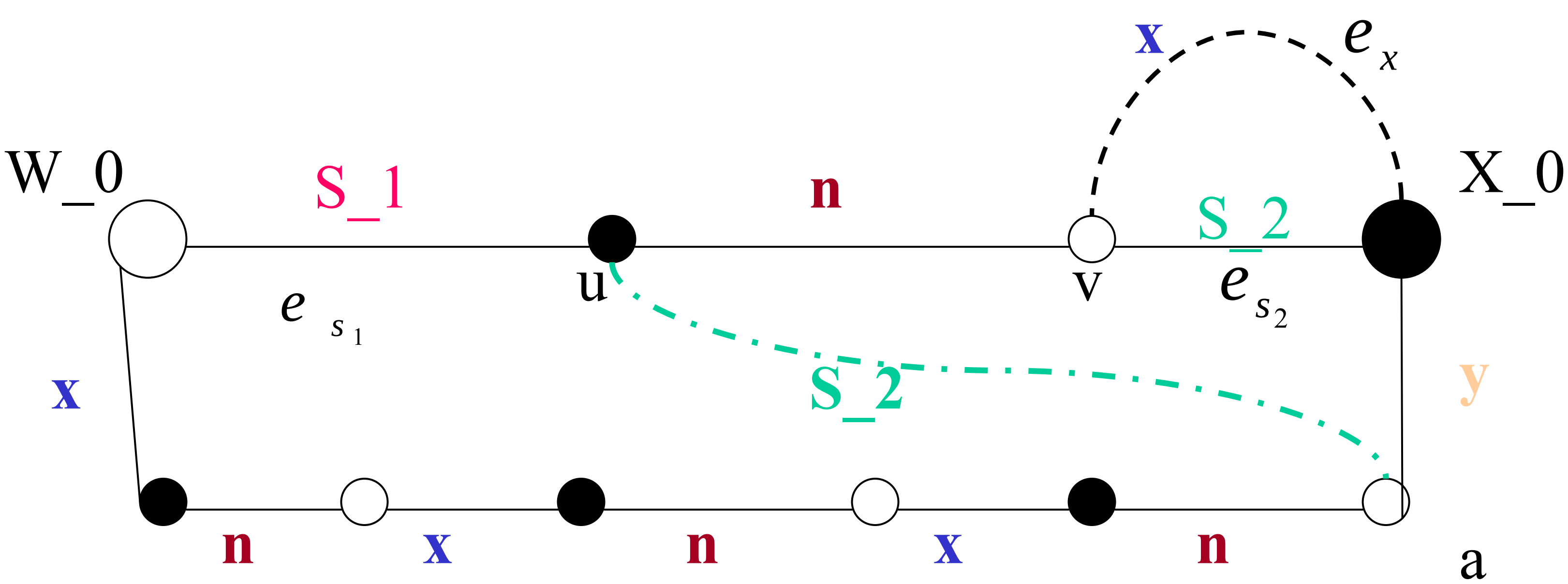


Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (8);

Περίπτωση 2: Παράλληλη..... (ε)....

Ισχύει η συνθήκη 2 αφού κάθε ζευγάρι απέναντι κόμβων «βλέπει» το πολύ 4 ενεργά χρώματα.

Και αυτό γιατί όλες οι γραμμές εκτός από την γραμμή του u «βλέπουν» 4 ενεργά χρώματα.Ο κόμβος u όμως είναι ο μοναδικός που «βλέπει» το χρώμα s1 οπότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γραμμή του μπορεί να δεί παραπάνω από 4 χρώματα(s1,n,x,y,s2).

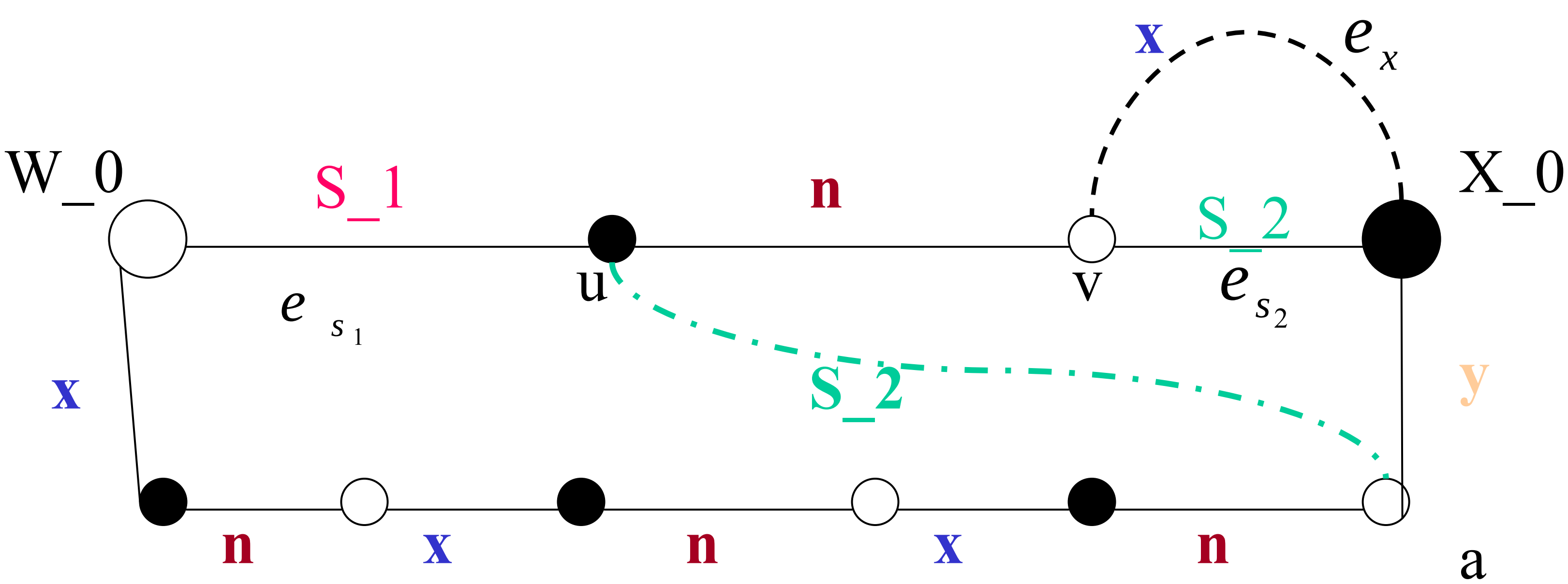


Γιατι είναι σωστός αυτός ο χρωματισμός (9);

Περίπτωση 2: Παράλληλη..... (στ)....

Ισχύει η συνθήκη 2 αφού κάθε ζευγάρι απέναντι κόμβων «βλέπει» το πολύ 4 ενεργά χρώματα.

Αλλά αυτό δεν γίνεται γιατί εάν απέναντί του είναι ο a τότε η γραμμή τους δεν θα βλέπει το x. Τέλος δεν μπορεί ο v να είναι απέναντι από τον u. (γιατί ο διμερές γράφος μας δεν έχει ακμές που συνδέουν δύο απέναντι κόμβους, οπότε αν υπάρχει ακμή που να συνδέει 2 κόμβους αυτοί σίγουρα δεν είναι απέναντι)



LOWER BOUND……….

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Για κάθε L>1, για κάθε ε>0 και για κάθε άπληστο αλγόριθμο G υπάρχει ένα δέντρο και ένα σχήμα (pattern) αιτήσεων μέγιστου φορτίου L όπου κάθε αλγόριθμος G χρησιμοποιεί τουλάχιστον (5/3-ε)L μήκη κύματος.

Θεωρούμε ότι το L είναι άρτιος και L>1.

LOWER BOUND……….(2)

Απόδειξη: Με **επαγωγή..........**

Εστω κόμβος C και $\alpha_n/2L$ αιτήσεις που διασχίζουν τον κόμβο αυτόν σε κάθε κατευθυνόμενη ακμή και ότι όλες αυτές οι αιτήσεις χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα..

Αρα συνολικά $\alpha_n L$ αιτήσεις.

Με : $$1 \leq a_n \leq 2$$

LOWER BOUND……….(3)

Επίσης αν/χούμε αιτήσεις μεταξύ 2 παιδιών Α και Β του C με τέτοιο τρόπο ώστε $(1+\alpha_n/2)L$ χρώματα (για α=1 έχουμε 3/2L) να χρησιμοποιούνται συνολικά και η επαγωγική υπόθεση μεταξύ των Α και Β και ενός από τα παιδιά τους μας λέει ότι:

$$\alpha_{n+1}=1+\alpha_n/4.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\alpha^*=\lim \alpha_n=4/3$ όταν n-->άπειρο

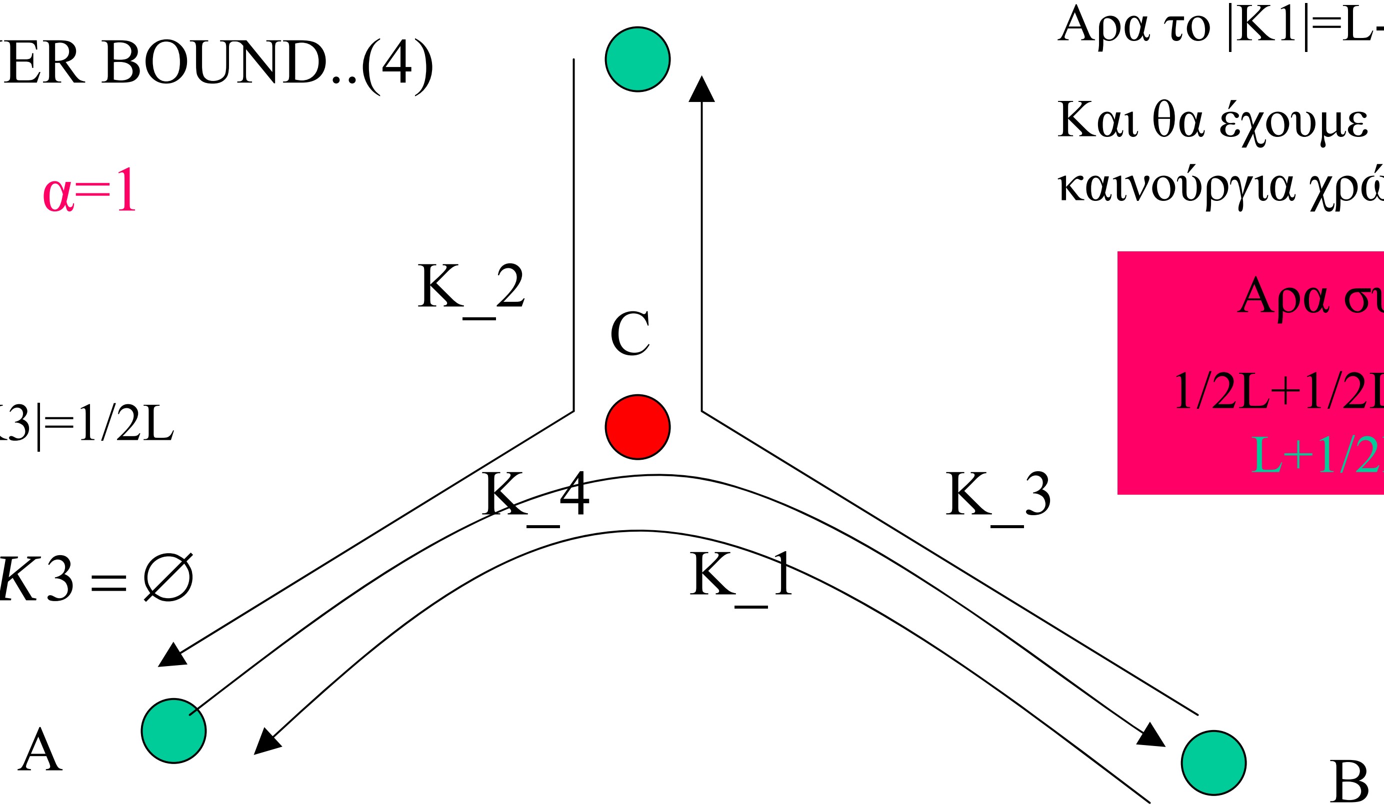
Αρα συνολικά (1+4/(3*2))L χρώματα.=5/3L

LOWER BOUND..(4)

Για α=1

Εστω
|K2|=|K3|=1/2L
και

$$K2 \cap K3 = \varnothing$$



Αρα το |K1|=L-1/2L=1/2L

Και θα έχουμε |K1| καινούργια χρώματα

Αρα συνολικά:

1/2L+1/2L+L-1/2L =
L+1/2L=3/2L

Στη συνέχεια πρέπει να χρωματίσουμε τα L σήματα του K4

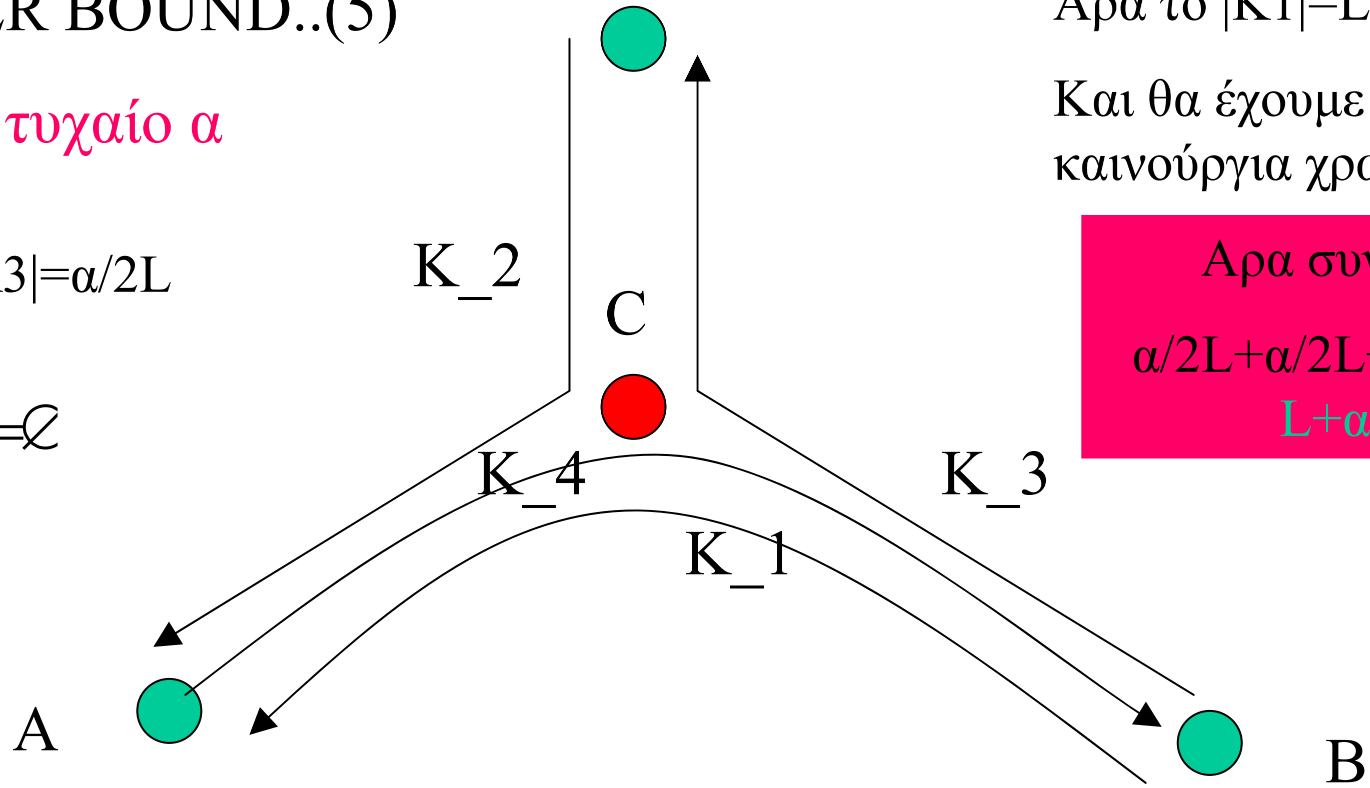
Ο **καλύτερος άπληστος αλγόριθμος** θα χρησιμοποιήσει όλα τα |K1| νέα χρώματα μαζί με τα μισά του K2 και τα μισά του K3

LOWER BOUND..(5)

Για τυχαίο α

Εστω
|K2|=|K3|=α/2L
και

$K2 \cap K3 = \emptyset$



Αρα το |K1|=L-α/2L

Και θα έχουμε |K1| καινούργια χρώματα

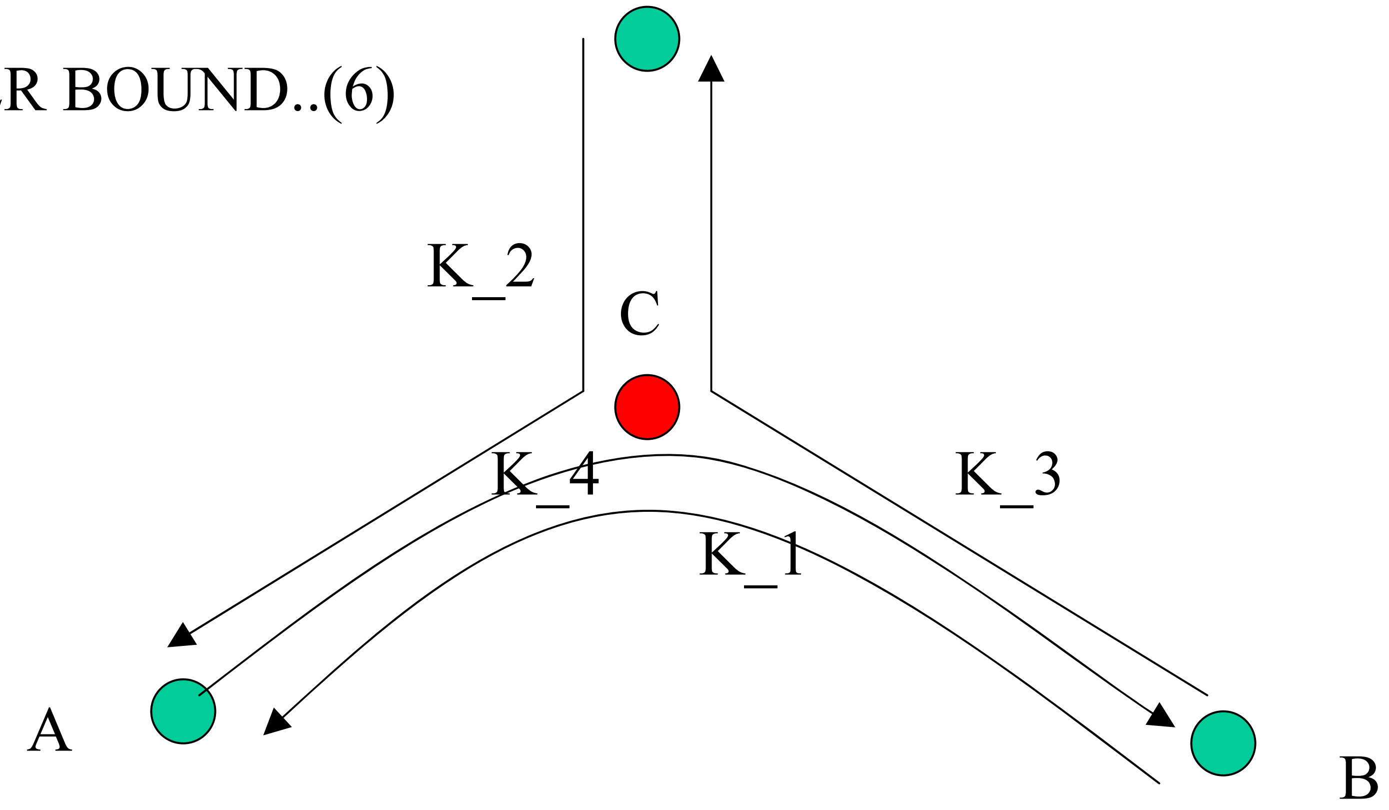
Αρα συνολικά:

α/2L+α/2L+L-α/2L =
L+α/2L

Στη συνέχεια πρέπει να χρωματίσουμε τα L σήματα του K4

O **καλύτερος άπληστος αλγόριθμος** θα χρησιμοποιήσει όλα τα |K1| νέα χρώματα μαζί με τα μισά του K2 και τα μισά του K3

LOWER BOUND..(6)



Η ακμή (A,C) τότε θα «βλέπει» (1+α/4)L χρώματα .....

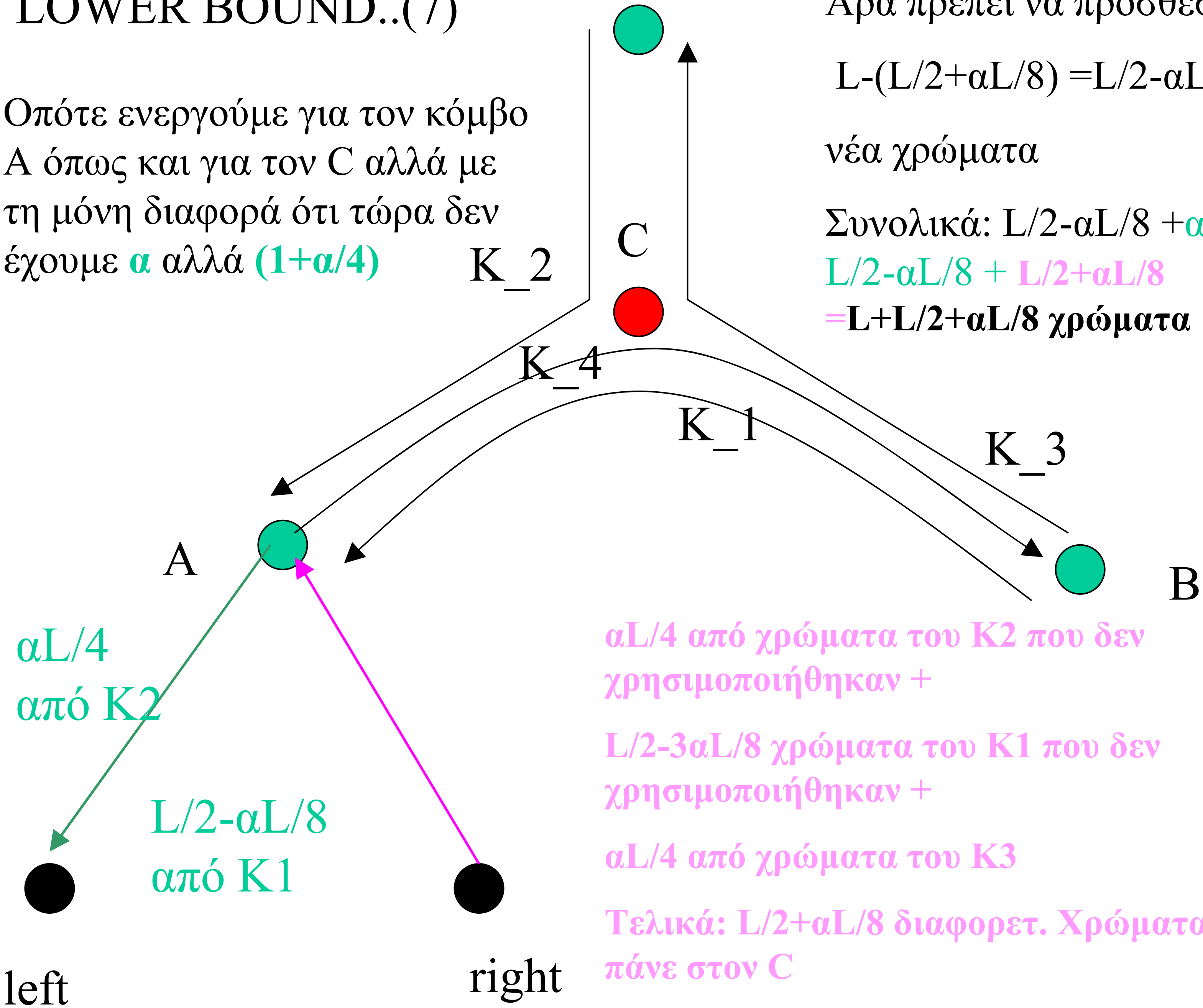
$$|K1 \cup K2 \cup K4| = |K1| + |K2| + |K4| - |K2 \cap K4| - |K1 \cap K4|$$

$$= (1 - \frac{a}{2})L + \frac{a}{2}L + L - \frac{a}{4}L - (1 - \frac{a}{2})L$$

$$= (1 + \frac{a}{4})L$$

LOWER BOUND..(7)

Οπότε ενεργούμε για τον κόμβο A όπως και για τον C αλλά με τη μόνη διαφορά ότι τώρα δεν έχουμε **α** αλλά **(1+α/4)**



Αρα πρέπει να προσθέσουμε

L-(L/2+αL/8) =L/2-αL/8

νέα χρώματα

Συνολικά: L/2-αL/8 +αL/4+ L/2-αL/8 + **L/2+αL/8**

=**L+L/2+αL/8 χρώματα**

αL/4 από χρώματα του K2 που δεν χρησιμοποιήθηκαν +

L/2-3αL/8 χρώματα του K1 που δεν χρησιμοποιήθηκαν +

αL/4 από χρώματα του K3

Τελικά: L/2+αL/8 διαφορετ. Χρώματα πάνε στον C

LOWER BOUND..(8)

Βρήκαμε λοιπόν:

$L+L/2+\alpha_n L/8$ χρώματα

Ενώ περιμέναμε :

$(1+\alpha_{n+1}/2)L$ χρώματα, όπου $\alpha_{n+1}=1+\alpha_n/4$

Τα οποία συμπίπτουν...

Ευχαριστώ........