Edge-coloring σε διμερή πολυγραφήματα

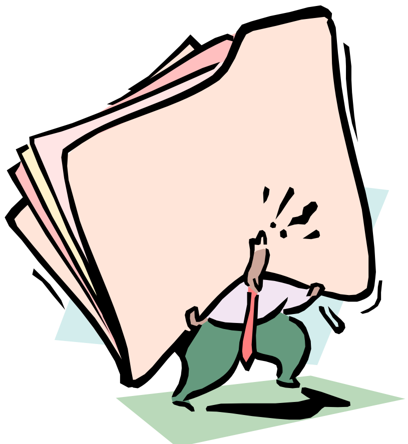
σε O(ED) χρόνο

από Alexander Schrijver

σε O(ElogD) χρόνο

από

Richard Cole Kristin Ost Stefan Schirra

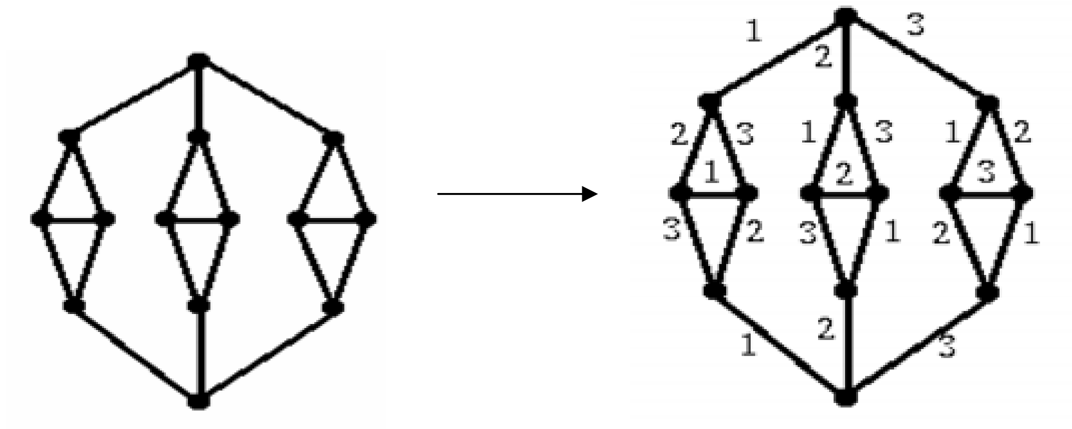


Μαρίνου Μαργαρίτα

Μ.Π.Λ.Α

Βασικοί Ορισμοί:

- Edge-coloring σε ένα πολυγράφημα G = (V,E) ,με V κορυφές και E ακμές, ονομάζουμε μία συνάρτηση c : E → N με την οποία σε κάθε ακμή e ∈ E δίνουμε ένα χρώμα c(e) ∈ N έτσι ώστε γειτονικές ακμές να μην έχουν το ίδιο χρώμα.Αν η συνάρτηση χρησιμοποιεί το πολύ k χρώματα τότε καλείται k-edge-coloring.



- Ένα edge coloring σε ένα πολυγράφημα G λέγεται minimal αν δεν υπάρχει άλλο edge coloring του G που να χρησιμοποιεί λιγότερα χρώματα.

- Ο αριθμός των χρωμάτων που χρησιμοποιούνται σε ένα minimal edge-coloring πολυγράφου G ,λέγεται χρωματικός δείκτης του G.

Το θέμα μας…

- Edge coloring problem καλείται το πρόβλημα εύρεσης ενός minimal edge-coloring σε ένα γράφο G.
- Το πρόβλήμα λύνεται σε χρόνο O(ED) αρχικά ενώ με βελτίωση καταλήγουμε σε O(ElogD), όπου D ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του γράφου.

Λίγα λόγια πριν..

- Απλοί γράφοι: Ο χρωματικός τους δείκτης είναι ίσος με D ή D + 1 όπου D ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του G. (V. Vizing : On an estimate of the chromatic class of a p-graph)
- Πολυγράφοι : Το πρόβλημα είναι γενικά NP-complete. (Άνω φράγματα δίνονται από: Sh. Nakano, X. Zhoou, T. Nishizeki, 1995). 1.1 ασυμπτωτικά προσεγγιστικός αλγόριθμος (Nishizeki-Kashiwagi 1990).
- Διμερή πολυγραφήματα: Ο χρωματικός του δείκτης είναι πάντα ίσος με το μέγιστο βαθμό των κορυφών του G.

❑ Στο εξής θα αναφερόμαστε μόνο για την τελευταία κλάση γράφων.

Μερικές πρακτικές εφαρμογές…

✓ Προβλήματα δρομολόγησης:
- Class- teacher time-table problem
- File transfer problem

✓ Άλλες περιοχές:
- k-k routing problem
- Routing permutation networks
- Προσομοίωση PRAM σε μηχανή κατανεμημένης μνήμης.

Προηγούμενη δουλειά…

- Απλός αλγόριθμός τάξης O(E $\sqrt{V}$ D) μέσω διαδοχικών matching, συνδυασμένο με μια κατασκευή από τους Mendelhson και Dulmage.
- Μέσω ‘αυξανόμενων’ μονοπάτιων οδηγούμαστε σε αλγόριθμο τάξης O(EV) (Konig 1916).
- Το 1976 ο Gabow παρουσιάζει μία λύση βασιζόμενη σε divide and conquer με τάξη O(E $\sqrt{V}$ logD).

στη συνέχεια…

- Το 1978 Gabow και Kariv βελτιώνουν το χρόνο σε $O(\min\{E\sqrt{V\log V}, E(\log V)D, (E+V^2)\log D\})$.

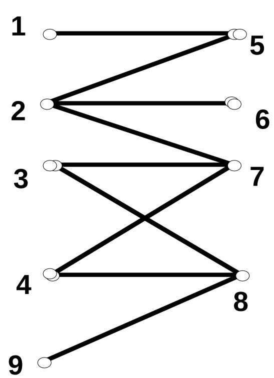
- Το 1982 νέα βελτίωση δίνει χρόνο $O(E(\log E)^2)$.Τον ίδιο χρόνο οι Cole και Hopcroft δίνουν αλγόριθμο τάξης$O(E(\log D + V\log V(\log D)^3) = O(E\log E)$, ενώ τελικά καταλήγουμε σε τάξη $O(E\log D + V\log V(\log D)^2)$ από τον Cole.

Εισαγωγικά..

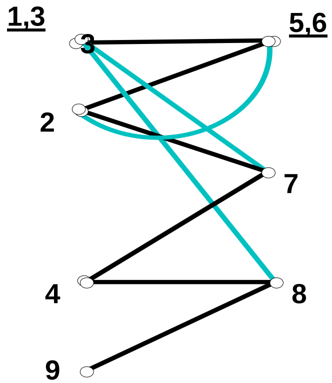
- ✓ Θεωρούμε ότι ο γράφος είναι D-κανονικός, δηλαδή ότι όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό D.

- o Κάθε διμερές μη κανονικός γράφος μπορεί να μετατραπεί σε κανονικό, με την ίδια λύση για το edge-coloring,συνδυάζοντας κατάλληλα κόμβος με χαμηλούς βαθμούς.
- o Συγκεκριμένα ‘ενώνουμε’ τους κόμβους που βρίσκονται από την ίδια πλευρά και έχουν άθροισμα βαθμών το πολύ D. Στη συνέχεια προσθέτουμε ακμές ενώ αν χρειαστεί προσθέτουμε κόμβους ώστε να έχουμε τον ίδιο αριθμό και στις δύο πλευρές και συμπληρώνουμε με ακμές μέχρι να φτάσουμε σε βαθμό D.

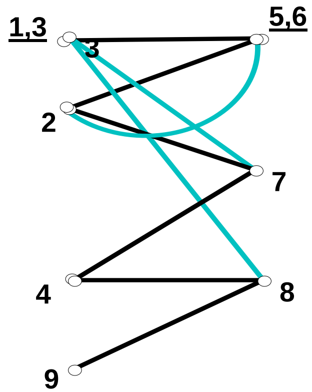
Γράφος με D=3:



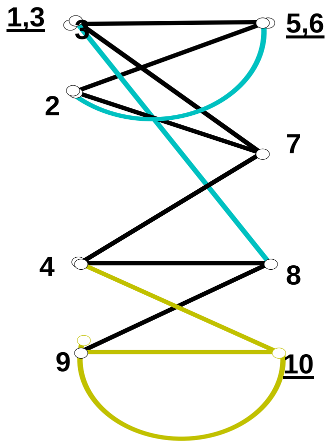
Ένωση κορυφών 1 και 3:



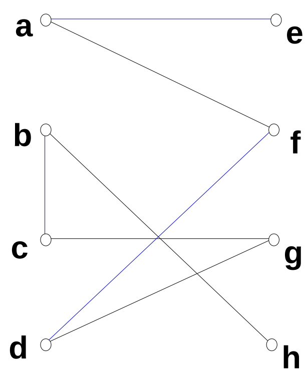
Πρόσθεση ακμών:



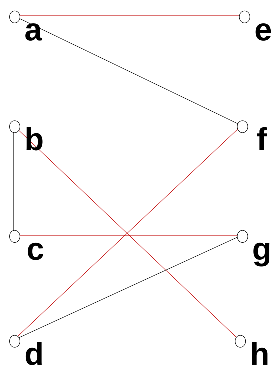
Πρόσθεση κορυφής και ακμών:



✓ Matching στο γράφο G είναι ένα υποσύνολο M των ακμών E, με την ιδιότητα οι ακμές να μην έχουν κοινή κορυφή.Το M λέγεται perfect matching αν περιλαμβάνει κάθε κορυφή του G.



matching: {(a,e) ,(b,c), (d,f)}



full matching:
{a,e), (b.h), (c,g), (f,d)}

‘Διαίρει και Βασίλευε…’

- Γενική ιδέα είναι ο διαμερισμός του G σε υπογραφήματα τα οποία χρωματίζονται αναδρομικά με διαφορετικά χρώματα.
- Για να πετύχουμε ένα minimal edge coloring πρέπει το άθροισμα των μέγιστων βαθμών των υπογραφημάτων να είναι D.
- Οι ακμές θα πρέπει να ‘διαιρούνται’ με τέτοιο τρόπο ώστε τα υπογραφήματα να είναι κανονικά.

Euler Partition…

- Ορισμός:

  Euler Partition σε ένα γράφο G είναι μια διαμέριση ακμών σε ανοικτά και κλειστά μονοπάτια ,ώστε κάθε κορυφή περιττού βαθμού να βρίσκεται στο τέλος, ενός μόνο , ανοικτού μονοπατιού,και κάθε κορυφή άρτιου βαθμού να μη βρίσκεται στο τέλος κανενός ανοικτού μονοπατιού.

Euler partition

Euler partition σε γράφο G:

1. Κάθε κορυφή περιττού βαθμού βρίσκεται στο τέλος ενός ανοικτού μονοπατιού.
2. Κάθε κορυφή άρτιου βαθμού να μη βρίσκεται στο τέλος κανενός ανοικτού μονοπατιού.

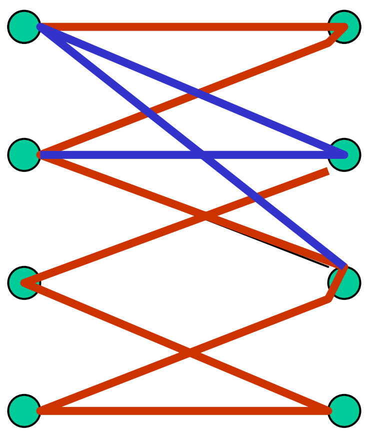
Euler Split…

- Ορισμός:

Euler split ενός γράφου G είναι ένας ‘χωρισμός ‘ του G σε δύο διμερές γραφήματα: $G_1 = (V,E_1)$ και $G_2 = (V,E_2)$ όπου E_1 και E_2 είναι σύνολα ακμών που προκύπτουν από τις ακμές ενός Euler partition,τοποθετώντας τις εναλλακτικά μια στην E_1 και μια στην E_2.

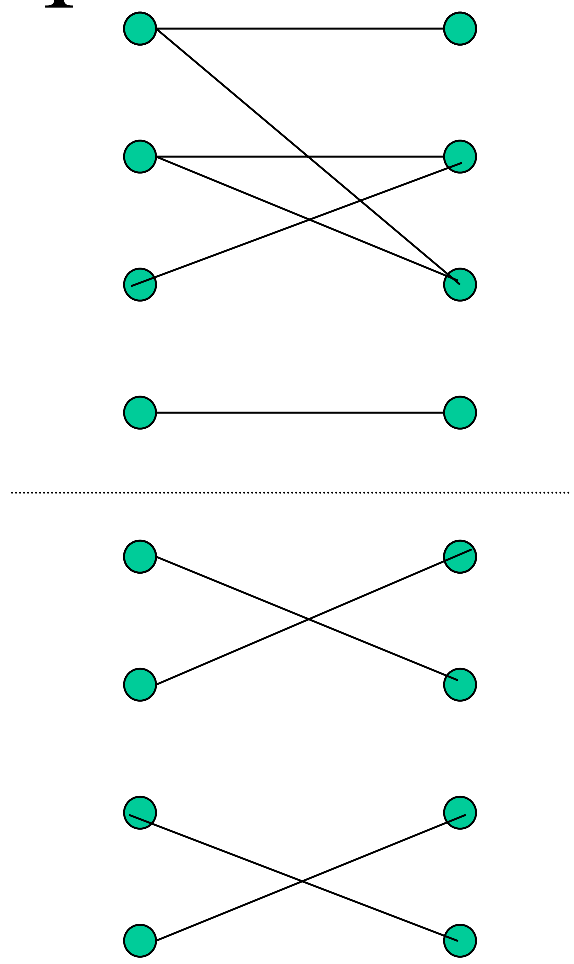
Euler split

G



G_1

G_2



Euler split του G σε G_1 και G_2:

1. Διέτρεξε κάθε μονοπάτι στο Euler partition.
2. Τοποθέτησε εναλλακτικά τις ακμές στο G_1 και G_2

Μετά από Euler Split…

- Κάθε κορυφή άρτιου βαθμού έχει τον ίδιο βαθμό στα G_1 και G_2.
- Κάθε κορυφή περιττού βαθμού έχει βαθμό στα G_1 και G_2 με διαφορά κατά ένα.
- Αν ο γράφος είναι κανονικός και D άρτιος, τότε όλες οι κορυφές του G θα έχουν βαθμούς D/2 στους G_1 και G_2.και αυτός θα είναι και ο μέγιστος βαθμός στα υπογραφήματα.
- Στην παραπάνω περίπτωση η διαμέριση δίνει κανονικούς υπογράφους.

D-κανονικοί διμερείς γράφοι με D-άρτιο…

- Αν $D=2^i$ με Euler Split διαμερίζουμε τον γράφο σε κανονικούς υπογράφους μέχρι να φτάσουμε σε 1-κανονικό υπογράφημα,οπότε και έχουμε καταλήξει σε D-matchings τα οποία και μπορούν τετριμένα να χρωματιστούν με ένα χρώμα.
- Με αναδρομική ένωση των υπογράφων στο τέλος θα έχουμε ένα D-edge coloring.
- Χρόνος για Euler Split είναι τάξης O(E) (διατρέχουμε τις ακμές) το οποίο επαναλαμβάνεται logD φορές (αφου $D=2^i$).
- Χρόνος για edge coloring σε D-κανονικό διμερές υπογράφο ,με D άρτιο,είναι τάξης O(ElogD)

D-κανονικοί διμερείς γράφοι με D-περιττό…

- Αν D περιττός τότε κάθε κορυφή του G μπορεί να έχει $\lceil D/2 \rceil$ βαθμό στο G1 και $\lfloor D/2 \rfloor$ στο G2 ή αντίστροφα. Επομένως ο διαμερίσεις δεν δίνουν κανονικά υπογραφήματα .
- Τα G1 και G2 μπορεί να έχουν και τα δύο μέγιστο βαθμό $\lceil D/2 \rceil$ και επομένως το άθροισμα των μέγιστων βαθμών να ξεπερνά το D.Τότε όμως κατά τον αναδρομικό χρωματισμό θα προστίθεται ένα επιπλέον χρώμα στους υπογράφους με αποτέλεσμα στο τέλος να έχουμε παραπάνω από D χρώματα.
- Ο προηγούμενος αλγόριθμός δεν ‘δουλεύει’ όταν D περιττός

Επίλυση Προβλήματος όταν D-περιττός…

- Γενική προσέγγιση είναι να βρούμε ένα perfect matching M του γράφου.
- Χρωματίζουμε τις ακμές του M με ένα χρώμα και το αφαιρούμε από το γράφο.
- Ο γράφος G – M είναι άρτιου βαθμού και τον χρωματίζουμε μέσω του προηγούμενου αλγορίθμου.
- Ο χρόνος του edge coloring εξαρτάται από το χρόνο εύρεσης του matching.

Perfect Matching σε D-κανονικό διμερές γράφημα με χρόνο τάξης O(DE) (ALEXANDER SCHRIJVER)

- Γενική ιδέα μέσω ‘διανομής ‘κατάλληλων βαρών στις ακμές του G:

  Αρχικά δίνουμε βάρη σε όλες τις ακμές, ίσο με ένα. Στη συνέχεια τα βάρη διαμοιράζονται με τέτοιο τρόπο ώστε το άθροισμα τους σε κάθε κορυφή να δίνει D, ενώ τα βάρη κάθε ακμής παίρνουν τιμές από 0 έως D. Σκοπός είναι να καταλήξουμε σε βάρη D για κάθε ακμή που θα προσπίπτει σε κάθε κορυφή έχοντας ως αποτέλεσμα ένα perfect matching.

Περιγραφή Αλγορίθμου…

- Έστω κάθε ακμή e έχει βάρος w(e).
- Αρχικά όλα τα βάρη είναι 1.
- G_W ο γράφος με ακμές θετικού βάρους (διαγράφουμε τις ακμές που το βάρος τους γίνεται μηδέν)
- Όσο ο G_W έχει κύκλους επανέλαβε:

    i) Πάρε έναν κύκλο C

    ii) Χώρισε τον C σε δύο matchings M και N ώστε

$$\sum_{e.\varepsilon.\mathrm{M}} w.(e) \geq \sum_{e.\varepsilon.\mathrm{N}} w.(e)$$

    iii) Αύξησε το βάρος κάθε ακμής του M κατά 1

    iv) Μείωσε το βάρος των ακμών του N κατά 1.

Ένα παράδειγμα…

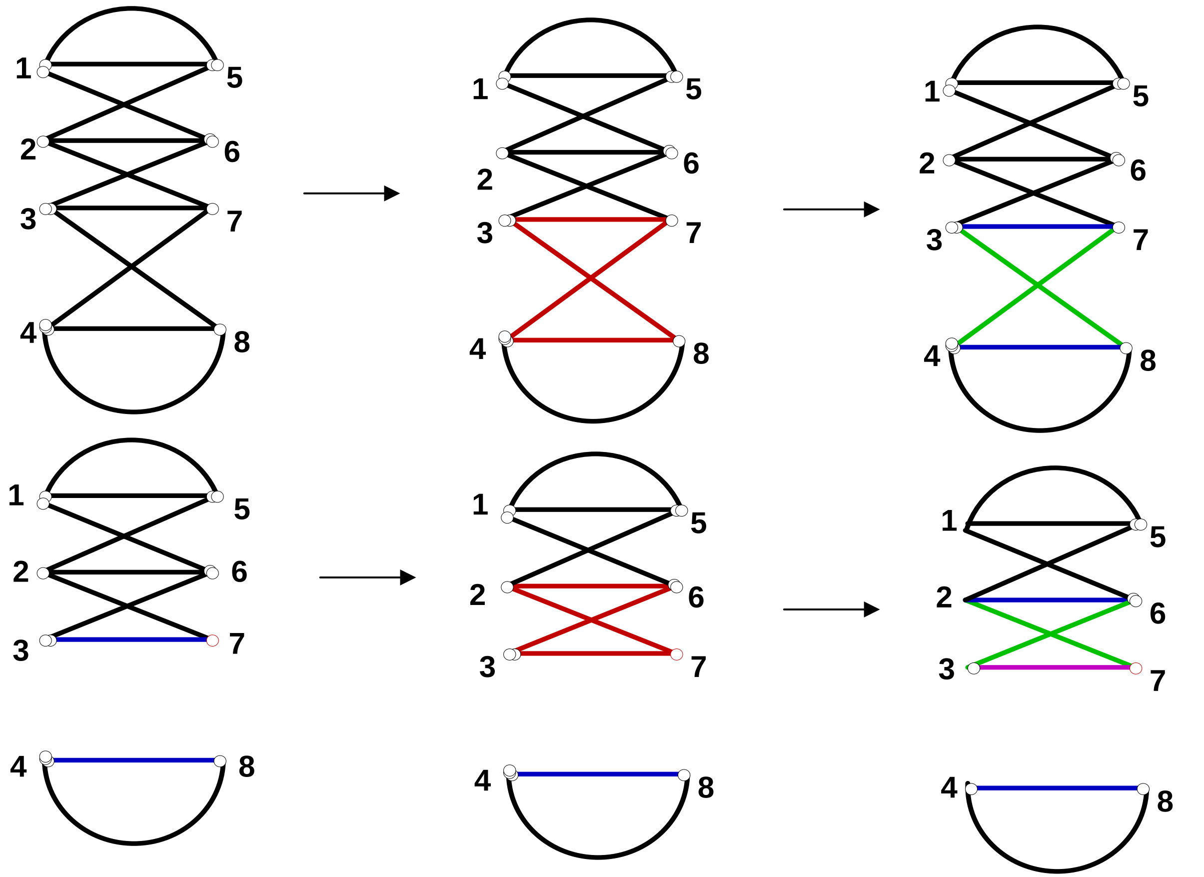
w(e)=0

w(e)=1

w(e)=2

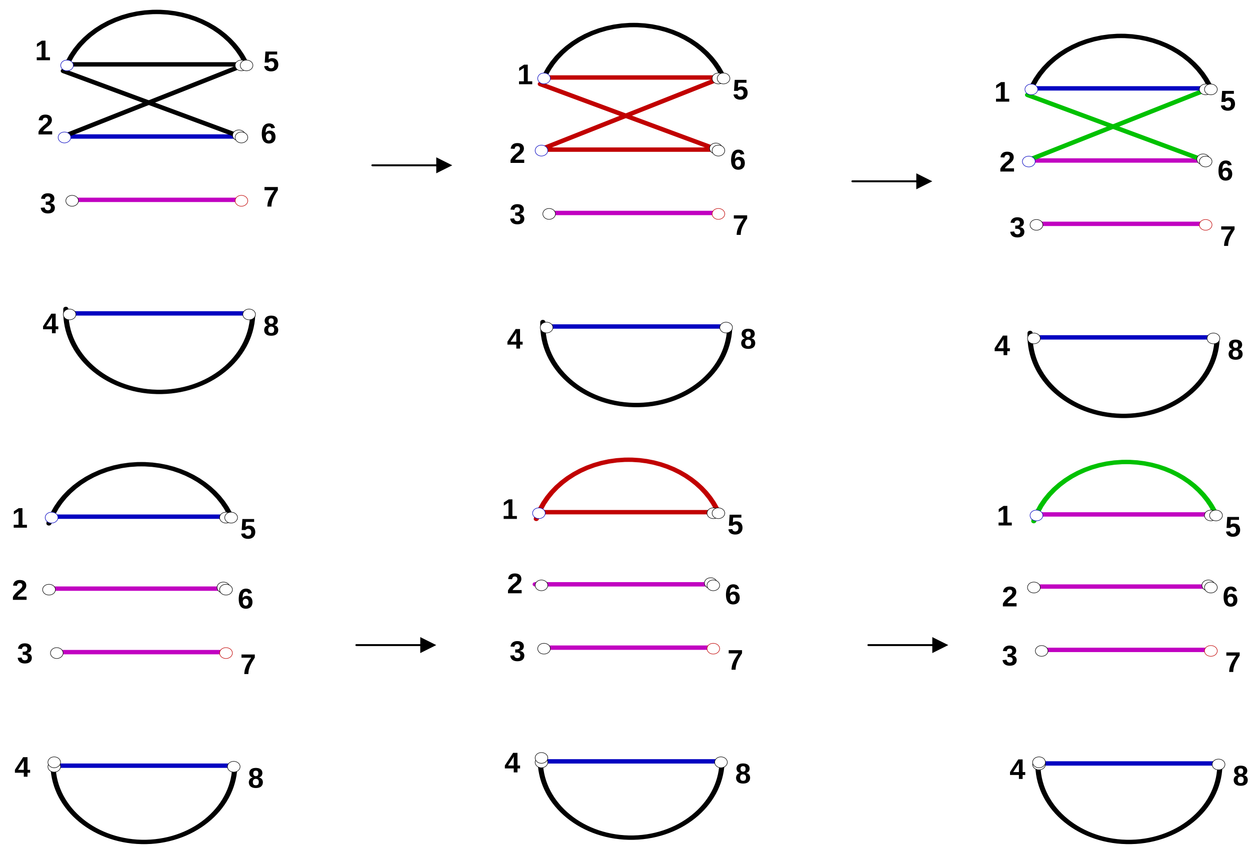
w(e)=3

Γράφος G: Κύκλοι : Matchings:



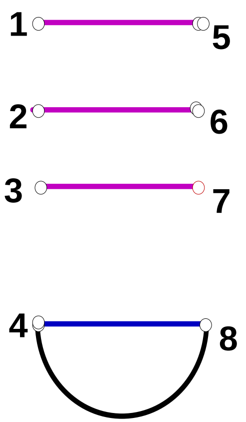
στη συνέχεια…

Γράφος G: Κύκλοι : Matchings:

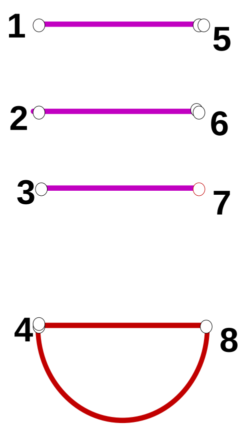


στο τέλος…

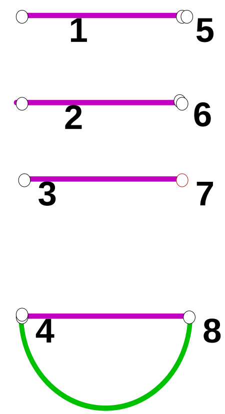
Γράφος G:



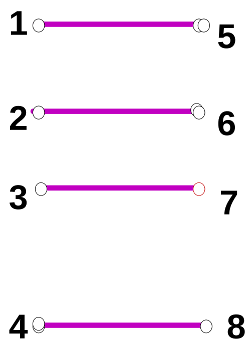
Κύκλοι :



Matchings



Perfect Matching



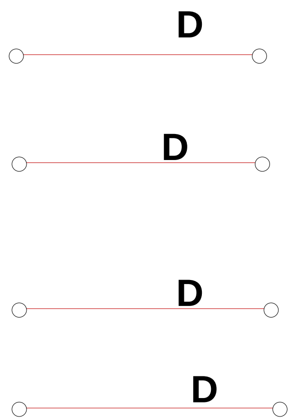
Εύρεση Κύκλου…

- Με DFS βρίσκουμε ένα μονοπάτι P από ακμές με βάρος $0<w(e)<D$.
- Έστω v η τελευταία κορυφή του μονοπατιού.
- Επιλέγουμε ακμή e=(v,u) η οποία να μην ανήκει στο P και με βάρος από 1 μέχρι D-1
- Αν u δεν ανήκει στο θέτουμε $P: = P \cup \{e\}$και επαναλαμβάνουμε, διαφορετικά θεωρούμε τον κύκλο

  $C:= P \cup \{e\}$ και θέτουμε $P: = P \setminus C$
- Αν P = 0 επιλέγουμε ακμή με $0<w(e)<D$ και θέτουμε $P=\{e\}$.Αν τέτοια ακμή δεν υπάρχει, δεν έχουμε άλλους κύκλους.
- Χρόνος τάξης $O(|C|)$.

Παρατηρήσεις…

- $\sum_{e.\varepsilon.\delta(\upsilon)} w.(e) = \mathrm{D}$ για κάθε κορυφή υ, όπου δ(υ) το σύνολο των ακμών που προσπίπτουν στη υ.
- $\sum_{e.\varepsilon.E} w.(e)^2 = \frac{1}{2} nD^2$ στο τέλος του αλγορίθμου, εφόσον θα έχουμε την μορφή:



Ακόμη…

- Το άθροισμα $\sum_{e.\varepsilon.E} w.(e)^2$ σε κάθε βήμα αυξάνεται κατά:

$$\sum_{e.\varepsilon.M}((w.(e)+1)^2 - w.(e)^2) + \sum_{e.\varepsilon.N}((w.(e)-1)^2 - w.(e)^2) =$$

$$\sum_{e.\varepsilon.M}(2w.(e)+1) - \sum_{e.\varepsilon.\mathrm{N}}(-2w.(e)+1) \geq |\mathrm{M}| + |\mathrm{N}| = |C|$$

Άρα $|C| \leq \frac{1}{2} nD^2$

Επομένως το μήκος του κύκλου φράσσεται και ο αλγόριθμος τερματίζει.

Χρόνος αλγορίθμου για perfect matching:

- ‘Βλέπουμε’ το άθροισμα $\sum_{e.\varepsilon.E} w.(e)^2$.
- Σε κάθε βήμα αυξάνεται τουλάχιστον κατά |C|.
- Αρχικά είναι 0 ενώ στο τέλος ισούται με $\frac{1}{2}nD^2$
- Επομένως ο χρόνος είναι ανάλογος του |C| και τάξης $O(D^2 n) = O(DE)$.

  (σε D-κανονικό γράφημα ισχύει DE= $\frac{1}{2}nD^2$)

Χρόνος για Edge-coloring:

- Αν D-άρτιος χρόνος O(ElogD)
- Αν D-περιττός χρόνος O(ED) για εύρεση matching και στη συνέχεια O(ElogD).Άρα χρόνος O(ED + ElogD)=O(ED)

Γενικά:

❖ Χρόνος Edge-Coloring σε διμερές πολυγράφο :

O(ED)

Προς αλγόριθμο τάξης O(ElogD) για το edge-coloring

Ο Schrijver μέσω της συνάρτησης

$$\phi(\kappa) := \sum_{i=1}^{t} \frac{p_i}{\prod_{j-1}^{i-1} p_j}$$

όπου $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_t$ είναι πρώτοι και $k := p_1 p_2 ... p_t$

προσπάθησε να φτάσει σε αλγόριθμο τάξης O(ElogD),μέσω διαφόρων προσεγγίσεων και υποθέσεων.Τελικά ένας τέτοιος αλγόριθμος δόθηκε από τους Cole , Ost και Schirra.

Perfect Matching σε D-κανονικό διμερές γράφημα με χρόνο τάξης O(DlogE) (Cole-Ost-schirra)

Με βελτιώσεις του προηγούμενου αλγορίθμού που αφορούν:

- το πλήθος των ακμών του G,
- την εύρεση μεγαλύτερων κύκλων σε συντομότερο χρόνο,
- και την κατάλληλη ανακατανομή βαρών.

➢Βελτίωση 1η:

Μείωση του αριθμού των ακμών από ½ nD σε nlogD με χρόνο τάξης O(E):

- Αρχικά βάρη ακμών w(e)=1
- Για i:= 0,1,…,logD επανέλαβε

  Βρες σετ ακμών E_i με $w(e_i) = 2^i$

  Βρες κύκλο στο E_i και χώρισε τις ακμές σε δύο
.
  matchings

  Αύξησε κατά 2^i τα βάρη των ακμών του M

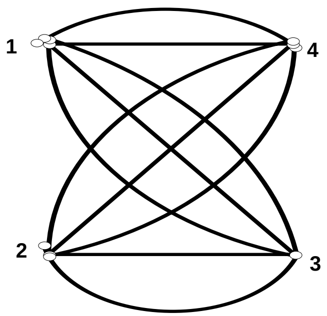
  Μείωσε κατά 2^i τα βάρη των ακμών του N

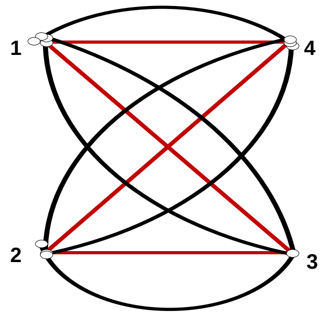
  Επανέλαβε όσο υπάρχουν κύκλοι στο E_i .

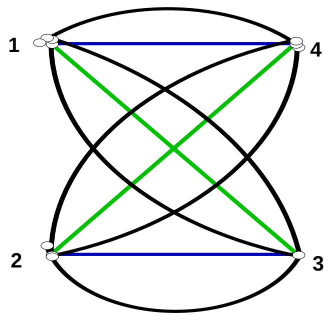
Ένα παράδειγμα…

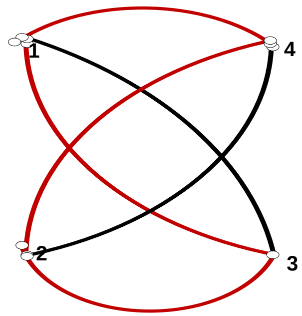
w(e)=0
w(e)=1
w(e)=2
w(e)=4

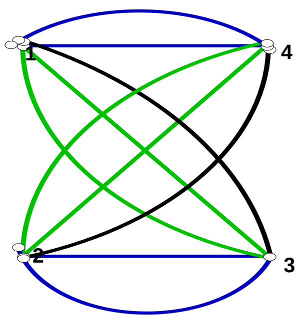
Γράφος G: Γράφος E_0 :

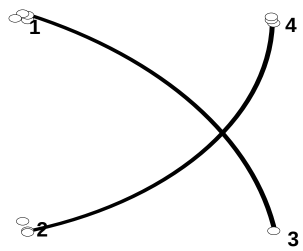






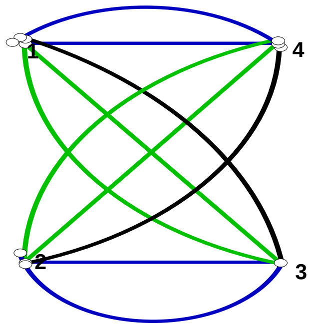




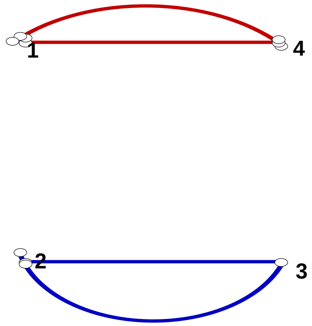


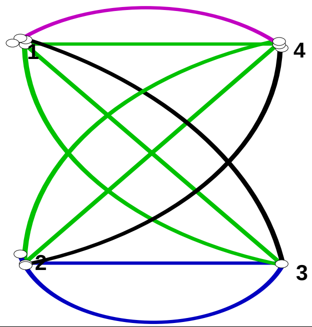
στη συνέχεια…

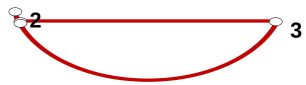
Γράφος G :

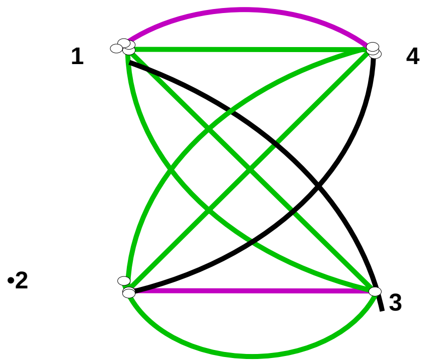


Γράφος E_1 :

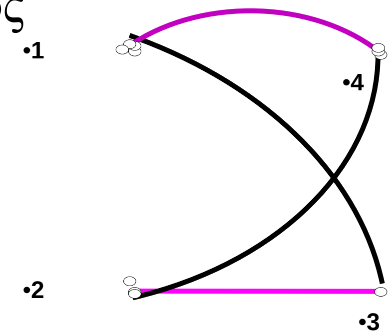








Τελικός Γράφος



Παρατηρήσεις..

- Τελικά έχουμε nlogD ακμές.(βάρη δύναμη του 2)

- Καταλήγουμε σε γράφο με άθροισμα των βαρών σε κάθε κορυφή ίσο με D (όσο μειώνεται το N αυξάνεται το M).

- Χρόνος για κάθε i είναι γραμμικός ως προς το μέγεθος του αρχικού E_i ,άρα τάξη $O(2^{-i} E)$

- Συνολικός χρόνος τάξης O(E)

➢Βελτίωση 2η:

Εύρεση Κύκλων:

- Οι ακμές προσαρμόζονται σε μονοπάτια που καλούνται αλυσίδες. Οι αλυσίδες δεν έχουν μεταξύ τους κοινές κορυφές. Θεωρούμε ότι αποτελούνται από το πολύ s ακμές. Χρόνος τάξης O(logs).
- ‘Χτίζουμε ‘ μονοπάτι μέσω DFS.Αν συναντήσουμε ακμή που προσπίπτει σε κορυφή αλυσίδας, χωρίζουμε την αλυσίδα και προσαρμόζουμε το μεγαλύτερο μέρος της στο μονοπάτι.Το υπόλοιπο κομμάτι της θα αποτελέσει μικρότερου μήκους αλυσίδα. Έτσι κάθε μονοπάτι αποτελείται από εναλλαγές ακμών και αλυσίδων.Εφόσον έχουμε ΄σπασίματα’ σε αλυσίδες ,το μήκος τους στο μονοπάτι ενδέχεται να είναι μικρότερο από s.

Ακόμη…

- Επειδή οι αλυσίδες δεν έχουν κοινές κορυφές κύκλος θα δημιουργείται με την προσθήκη ακμής και όχι αλυσίδας. Η ακμή αυτή μπορεί να προστίθεται σε αλυσίδα μικρότερου μήκους από s, ενώ να συναντά μια άλλη στο εσωτερικό της. Έτσι ο κύκλος μπορεί να έχει δύο αλυσίδες μικρότερου μήκους από s.
- Για να εντοπίσουμε τον κύκλο κρατάμε ένα ‘bit’ για κάθε αλυσίδα ,ώστε να ελέγχουμε αν αυτή βρίσκεται στο μονοπάτι.Μόλις μια ακμή ή αλυσίδα προστίθεται στο μονοπάτι, η νέα τελευταία κορυφή του μονοπατιού ελέγχεται ώστε να δούμε αν ανήκει ήδη στο μονοπάτι.

➢Βελτίωση 3η:

Ανακατανομή βαρών μετά την εύρεση κύκλου:

- Αρχικά οι ακμές έχουν βάρη 1
- Χωρίζουμε τις ακμές του κύκλου σε δύο matchings M και N και βρίσκουμε το ελάχιστο βάρος ,έστω α,των ακμών του N.
- Αυξάνουμε τα βάρη των ακμών του M κατά α
- Μειώνουμε τα βάρη των ακμών του N κατά α.
- Απομακρύνουμε τις μηδενικές ακμές.

Έτσι σε κάθε βήμα τουλάχιστον μία ακμή από το N θα αφαιρείται.

Συνολικός χρόνος για το Perfect Matching

Εξαρτάται από το χρόνο εύρεσης κύκλου:

- Έστω κύκλος μήκους L.

  Τότε ο αριθμός αλυσίδων που παράγει είναι:

  $\lceil L/s \rceil + 1 +$ (αριθμό ακμών βάρους 0 που διαγράφηκαν)

  Όμως τουλάχιστον μία ακμή βάρους 0 έχει διαγραφεί,άρα το παραπάνω άθροισμα φράσσεται από:

  L/s + 3* (αριθμό ακμών βάρους 0 που διαγράφηκαν)
- Από Sch έχουμε ότι το συνολικό μήκος των κύκλων φράσσεται από ½ nD^2 ,ενώ το σύνολο των ακμών βάρους 0 είναι το πολύ nlogD. Άρα ο αριθμός των αλυσίδων που παράγονται από το εύρεση κύκλων φράσσεται από:

  $nD^2/2s + 3n\log D = O(n\log D)$ αν $s \geq D^2$
- Κάθε αλυσίδα χωρίζεται και ενώνεται σε O(logs)
- Για $s=D^2$ χρόνος $O(n\log^3 D) = O(nD) = O(E)$

Χρόνος για Edge-coloring:

- Αν D-άρτιος χρόνος O(ElogD)
- Αν D-περιττός χρόνος O(E) για εύρεση matching και στη συνέχεια O(ElogD).Άρα χρόνος O(E + ElogD)=O(ElogD)

Γενικά:

❖ Χρόνος Edge-Coloring σε διμερής πολυγράφους :

O(ElogD)

Τελευταία Σχόλια…

- ✓ Ο Holyer έδειξε ότι είναι γενικά NP-complete πρόβλημα το 3-edge-coloring σε 3-κανονικό γράφο.Επομένως σε μη διμερείς γράφους το πρόβλημα είναι NP-complete.Ωστόσο το 4-edge-coloring για τους παραπάνω γράφους λύνεται σε γραμμικό χρόνο.

- ✓ Ανοιχτό πρόβλημα ο χρωματισμός διμερές γράφου σε χρόνο O(E).

τέλος παρουσίασης

ευχαριστώ....