

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

(ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ)

Διδάσκων: Α. Παγουρτζής

Εαρινό εξάμηνο 2016-17

2η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 8/6/2017

Άσκηση 1

(α) Δώστε έναν καθαρά συνδυαστικό f -προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα Set Cover, όπου f είναι το μέγιστο πλήθος συνόλων στα οποία μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο. Ο αλγόριθμός σας θα πρέπει να είναι γενίκευση της ιδέας του 2-προσεγγιστικού αλγορίθμου για το Vertex Cover.

(β) Θεωρήστε τον αλγόριθμο για το Set Cover που λύνει το LP relaxation (κεφ. 13 Vazirani) και παίρνει στη λύση όλα τα σύνολα για τα οποία $x_s > 0$ (προσοχή στη διαφορά από τον αλγόριθμο του κεφ. 14). Δείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός επιτυγχάνει επίσης προσεγγιστικό λόγο f .

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τις primal complementary slackness conditions.

(γ) Ποιος από τους παραπάνω αλγορίθμους είναι πιο αποδοτικός;

Άσκηση 2

Μελετήστε τον απλό 2-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το πρόβλημα k -Center, που αναφέρεται στο βιβλίο των Williamson-Shmoys, σελ. 38.

(α) Δείξτε ότι ο αλγόριθμος αυτός είναι ταυτόχρονα και 2-προσεγγιστικός και για το πρόβλημα Metric k -Cluster (ορισμός του προβλήματος στην άσκηση 5.13 του βιβλίου του Vazirani).

(β) Εξετάστε κατά πόσον μπορείτε να προσαρμόσετε την ιδέα του αλγορίθμου ώστε να επιλύσετε (προσεγγιστικά) την εκδοχή με βάρη (Weighted k -Center και Weighted k -Cluster).

Άσκηση 3

Θεωρήστε την εξής τροποποίηση του αλγορίθμου 10.2 (Vazirani) για το πρόβλημα Minimum Makespan Scheduling: στο βήμα 1 οι εργασίες ταξινομούνται κατά φθίνουσα σειρά διάρκειας. Αποδείξτε ότι ο τροποποιημένος αλγόριθμος επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $4/3$ και βρείτε tight example.

Υπόδειξη: ακολουθήστε την ανάλυση του Θεωρήματος 10.3 και ξεχωρίστε τις περιπτώσεις $p_j \leq OPT/3$ και $p_j > OPT/3$. Στη 2η περίπτωση σκεφτείτε πόσες εργασίες μπορεί να έχει αναλάβει κάθε μηχανή μέχρι τη στιγμή $start_j$.

Άσκηση 4

Σχεδιάστε συγχρονισμένο κατανεμημένο αλγόριθμο εύρεσης (ενός οποιουδήποτε) συνδεδετικού δένδρου σε δίκτυο μορφής torus $n \times n$. Θεωρήστε ότι κάθε κόμβος γνωρίζει μόνο το n και τη μορφή του δικτύου, ότι μπορεί να ανταλλάξει μηνύματα με τους γειτονικούς του κόμβους και ότι μπορεί να διακρίνει τους γείτονές του σε αριστερό, δεξιό, πάνω και κάτω. Τέλος θεωρήστε ότι οι κόμβοι έχουν μοναδικούς αριθμούς ταυτότητας (UIDs).

Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας σε 'γύρους' (round complexity) και σε πλήθος μηνυμάτων (communication complexity);