Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγόριθμοι Δικτύων και Πολυπλοκότητα

(ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ)

Διδάσκων:Α. Παγουρτζής

μερική συνδιδασκαλία με

Θεωρία Υπολογισμού

(ΣΗΜΜΥ)

Διδάσκοντες: Φ. Αφράτη, Α. Παγουρτζής

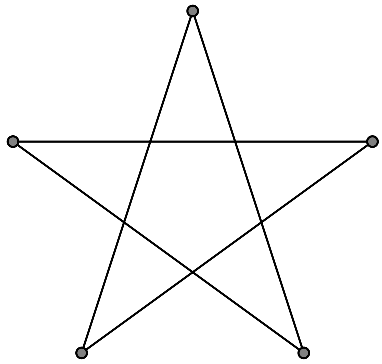
Εαρινό εξάμηνο 2014-15

1η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: 27/4/2015

Άσκηση 1

Στο παρακάτω σχήμα μπορείτε να χαράξετε δύο γραμμές και να δημιουργήσετε δέκα τρίγωνα (μη επικαλυπτόμενα);



Άσκηση 2

Ορίζουμε το πρόβλημα Generalized Matching ως εξής: με κάθε κόμβο v συσχετίζεται μια ακέραια τιμή $m(v)$ που αντιπροσωπεύει το μέγιστο πλήθος γειτόνων που επιτρέπεται να έχει ο v στο γενικευμένο ταίριασμα. (Παρατηρήστε ότι το κλασικό Matching είναι η ειδική περίπτωση όπου $\forall v, m(v) = 1$.)

Βρείτε αλγόριθμο που να επιλύει βέλτιστα το Generalized Matching σε διμερείς (μη κατευθυνόμενους) γράφους.

Άσκηση 3

(α) Βρείτε το λόγο προσέγγισης του προφανούς Greedy αλγορίθμου για το Vertex Cover: σε κάθε βήμα προσθέτει στο Vertex Cover την κορυφή με το μεγαλύτερο βαθμό και αφαιρεί από το γράφο αυτή και τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή, μέχρι να αφαιρεθούν όλες οι ακμές.

Υπόδειξη 1: Δείξτε και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος καλύπτει τουλάχιστον το 1/OPT των ακμών που απομένουν.

Υπόδειξη 2: Μπορεί να χρειαστείτε την ανισότητα: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 1 \leq e^x$.

(β) Βρείτε ένα tight (ανελαστικό) παράδειγμα για τον λόγο προσέγγισης που βρήκατε στο (α).

Άσκηση 4

Αποδείξτε το θεώρημα König-Egerváry: σε κάθε διμερή γράφο το μέγεθος του μέγιστου ταιριάσματος (maximum matching) ισούται με το μέγεθος της ελάχιστης κάλυψης κορυφών (vertex cover).

Άσκηση 5

Ορίστε το πρόβλημα Independent Set - Decision (πρόβλημα απόφασης).

Δώστε αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου από το πρόβλημα Maximum Independent Set (πρόβλημα βελτιστοποίησης) στο πρόβλημα αυτό.

Άσκηση 6 [1]

Θεωρήστε το πρόβλημα Maximum Path Coloring (MaxPC): Δίνεται μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, μονοπάτια $p_i = (s_i, t_i), 1 \leq i \leq k$, και ένας αριθμός χρωμάτων w. Ζητείται να χρωματιστούν όσο το δυνατόν περισσότερα μονοπάτια έτσι ώστε μονοπάτια που έχουν κοινή ακμή να παίρνουν διαφορετικό χρώμα.

[Σημείωση: μία από τις εφαρμογές του προβλήματος είναι στην ανάθεση μηκών κύματος σε οπτικά δίκτυα: κάθε χρώμα αντιστοιχεί σε κάποιο μήκος κύματος και τα μονοπάτια αντιστοιχούν σε συνδιαλέξεις. Κάθε οπτική ίνα διαθέτει w μήκη κύματος, και κάθε συνδιάλεξη πρέπει να εξυπηρετηθεί από ένα και μόνο μήκος κύματος (από την αρχή ως το τέλος της), έτσι ώστε συνδιαλέξεις που χρησιμοποιούν την ίδια οπτική ίνα να βρίσκονται σε διαφορετικά μήκη κύματος.]

(α) Σχεδιάστε έναν ακριβή αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το MaxPC στην περίπτωση που ο γράφος εισόδου είναι αλυσίδα («ευθεία γραμμή», λέγεται και path graph). Αποδείξτε την ορθότητα και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Υπόδειξη: προσπαθήστε να βρείτε λύση για ένα χρώμα ($w = 1$) και στη συνέχεια γενικεύστε την.

(β) Σχεδιάστε έναν ακριβή αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για το MaxPC στην περίπτωση που ο γράφος εισόδου είναι δακτύλιος (ring graph) και έχουμε ένα διαθέσιμο χρώμα ($w = 1$). Δείξτε με ποιον τρόπο μπορούμε να επιτύχουμε $(1 - 1/e)$-προσεγγιστικό αλγόριθμο για το MaxPC σε δακτυλίους, για $w > 1$.

(γ) Μπορείτε να επεκτείνετε το αποτέλεσμα του (β) στο πρόβλημα Maximum Routing and Path Coloring (MaxRPC); Αν ναι πώς; Αν όχι γιατί;

[1] Άσκηση προαιρετική για τους προπτυχιακούς φοιτητές του μαθήματος “Θεωρία Υπολογισμού”.

Ορισμός MaxRPC: Δίνεται μη κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, E)$, αιτήσεις σύνδεσης $r_i = (s_i, t_i), 1 \leq i \leq k$, και ένας αριθμός χρωμάτων w. Ζητείται να ανατεθεί ένα μονοπάτι σε κάθε αίτηση και ένα χρώμα (από τα w διαθέσιμα) σε όσο το δυνατόν περισσότερα μονοπάτια έτσι ώστε μονοπάτια που έχουν κοινή ακμή να παίρνουν διαφορετικό χρώμα.