Recursive and Recursively Enumerable sets V

Θεώρημα

Το A είναι αναδρομικό ανν το A και το $\overline{A}$ είναι r.e..

Απόδειξη.

"$\Rightarrow$" : Έστω A αναδρομικό, δηλαδή υπάρχει πρόγραμμα π που αποφαίνεται για το A. Κατασκευάζουμε πρόγραμμα που εκτελεί το π επανειλημμένα για να αποφανθεί για όλες τις εισόδους: 0, 1, 2, ... Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούν να απαριθμηθούν το A και το $\overline{A}$.

"$\Leftarrow$" : Έστω A και $\overline{A}$ r.e., δηλ. υπάρχουν δύο προγράμματα π_1, και π_2 που απαριθμούν (καταγράφουν) το A και το $\overline{A}$ αντιστοίχως. Κατασκευάζουμε πρόγραμμα που ελέγχει αν $n \in A$ τρέχοντας εν παραλλήλω το π_1 και το π_2. Το n θα εμφανιστεί κάποτε είτε στην έξοδο του π_1 είτε στην έξοδο του π_2. Έτσι τότε θα αποφασίσει το πρόγραμμα αν $n \in A$ ή όχι (φυσικά δεν είναι γνωστό πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να απαντηθεί το ερώτημα: "$n \in A$;").

□

Recursive and Recursively Enumerable sets VI

Θεώρημα

Το A είναι αναδρομικό ανν $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου f γνησίως αύξουσα αναδρομική συνάρτηση ή το A είναι πεπερασμένο σύνολο.

Απόδειξη:

"$\Leftarrow$" : Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε είναι προφανώς και αναδρομικό. Αν $A = \mathrm{ran}(f)$, όπου f γνησίως αύξουσα, τρέχουμε διαδοχικά προγράμματα $f(0), f(1), \ldots$ μέχρι η $f(k)$ να γίνει μεγαλύτερη ή ίση από την είσοδο μας x. Σε αυτό το σημείο αποφασίζεται αν $x \in A$ ή $x \notin A$.

"$\Rightarrow$" : Έστω μη πεπερασμένο αναδρομικό σύνολο A. Αν διατάξουμε τα στοιχεία του A με αύξουσα σειρά, τότε η συνάρτηση $f(x) = a_x$ ($x-$στοιχείο του A) είναι γνησίως αύξουσα και υπολογίζεται από το ακόλουθο πρόγραμμα π (με είσοδο x και έξοδο y):

$z := 0$; $y := 0$;
while $z \leqslant x$ **do**
  if $y \in A$ **then** $z := z + 1$;
  $y := y + 1$
end;
$y := y - 1$

Παρατήρηση: Επειδή το A είναι άπειρο η f είναι ολική.

□

Recursive and Recursively Enumerable sets VII

Παρατήρηση

Η κλάση των **αναδρομικών σχέσεων** είναι **κλειστή** ως προς:

- όλες τις **λογικές πράξεις** (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) και ως προς
- **φραγμένους ποσοδείκτες** (bounded quantification, $\forall\ <, \exists\ <$).

Η κλάση (RE) των **recursively enumerable σχέσεων** είναι **κλειστή** ως προς:

- **ένωση και τομή** και όχι όμως και ως προς συμπλήρωμα.
- **φραγμένο καθολικό ποσοδείκτη** (bounded universal quantification: $\forall\ <$) και **μη φραγμένο υπαρξιακό ποσοδείκτη** (unbounded existential quantification: $\exists$).

Recursive and Recursively Enumerable sets VIII

Ορμώμενοι από τις αναγωγές που κάναμε του HP, για παράδειγμα, σε άλλα προβλήματα, εισάγουμε τώρα την έννοια της *αναγωγιμότητας (reducibility)*.

Ορισμός

$A \leqslant_m B$: (A είναι (πολλά-ένα) αναγώγιμο στο B):
$\exists g \in R\ \forall n : (n \in A \leftrightarrow g(n) \in B)$.
Αν επιπλέον η g είναι 1-1, τότε γράφουμε $A \leqslant_1 B$ (το A είναι ένα προς ένα αναγώγιμο στο B).
Αν η συνάρτηση g είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας μιλάμε για αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου και συμβολίζουμε $A \leqslant_m^p B$ (αναγωγή κατά Karp).

Θεώρημα

α) $\leqslant_m$ *είναι ανακλαστική και μεταβατική.*

β) $A \leqslant_m B \Rightarrow \overline{A} \leqslant_m \overline{B}$

γ) $A \leqslant_m B \wedge B$ *αναδρομικό* $\Rightarrow A$ *αναδρομικό*
[ή : $A \leqslant_m B \wedge A$ *μη επιλύσιμο* $\Rightarrow B$ *μη επιλύσιμο]*

δ) $A \leqslant_m B \wedge B$ *r.e.* $\Rightarrow A$ *r.e.*

Recursive and Recursively Enumerable sets IX

Ορισμός

$A \equiv_m B: \ A \leqslant_m B \wedge B \leqslant_m A$

Παρατήρηση

Η $\equiv_m$ είναι σχέση ισοδυναμίας και διαβάζεται "έχουν τον ίδιο *βαθμό (μη) επιλυσιμότητας*" (have the same degree of unsolvability).

Έστω C μια κλάση από σύνολα (π.χ. RE η κλάση των r.e. συνόλων).

Ορισμός

B *είναι δύσκολο (hard) στην* C *ως προς* $\leqslant_m$: $\forall A \in C : A \leqslant_m B$

Ορισμός

B *είναι πλήρες (complete) στην* C *ως προς* $\leqslant_m$: $B \in C$ και B είναι δύσκολο στην C ως προς $\leqslant_m$.

Recursive and Recursively Enumerable sets X

Παρατήρηση:

Π.χ. αν $C = NP$ έχουμε προβλήματα (ή σύνολα) *πλήρη* στην NP (NP είναι η κλάση προβλημάτων υπολογιστών μη ντετερμινιστικά σε πολυωνυμικό χρόνο) [ως προς αναγωγή πολυωνυμικού χρόνου].

Η χρησιμότητα της έννοιας του NP-πλήρους προβλήματος φαίνεται και από το εξής: Αν ένα NP-πλήρες πρόβλημα A αποδειχθεί ότι επιλύεται με πολυωνυμικού χρόνου ντετερμινιστικό αλγόριθμο, τότε κάθε NP πρόβλημα θα επιλύεται επίσης με πολυωνυμικό (ντετερμινιστικό) αλγόριθμο, αφού ανάγεται πολυωνυμικά στο A.

Recursive and Recursively Enumerable sets XI

Θεώρημα

α)

$$\left.\begin{array}{l} \textit{To } B \textit{ είναι πλήρες στην } RE \\ B \leqslant_m C \\ \textit{To } C \textit{ είναι r.e.} \end{array}\right\} \Rightarrow C \textit{ πλήρες στην } RE.$$

β) A *και* B *είναι πλήρη στην RE* $\Rightarrow A \equiv_m B$

γ) *Το* K *είναι πλήρες στην RE.*

Απόδειξη: Άσκηση ...

Μαντεία I

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε προγράμματα ή μηχανές Turing με **μαντεία**.

Επιτρέπουμε στα προγράμματα (ή μηχανές) να εισέρχονται σε κατάσταση ερώτησης (οσοδήποτε συχνά), ενώ υπολογίζουν και να συμβουλεύονται ένα *μαντείο* για το A, δηλαδή μία συσκευή που μπορεί να αποφασίζει την ιδιότητα "στοιχείο του" για το A ($x \in A$ ή όχι;). Αν το μαντείο αποκρίνεται για ένα αναδρομικό σύνολο A, τότε το πρόγραμμα μας (ή TM) υπολογίζει ακριβώς όλες τις υπολογίσιμες συναρτήσεις. Αν όμως το μαντείο αποκρίνεται για άλλα μη επιλύσιμα σύνολα (π.χ. K), τότε το πρόγραμμα μας υπολογίζει συναρτήσεις που είναι *υπολογίσιμες με χρήση μαντείου για το σύνολο A* ή *απλά A-υπολογίσιμες*.

Ορισμός

$\mathcal{PR}^A$ είναι η μικρότερη κλάση συναρτήσεων

1. περιλαμβάνει τις S, P, Z, U_i^n και χ_A
2. είναι κλειστή ως προς σύνθεση, πρωταρχική αναδρομή και μ-σχήμα.

Παρόμοια, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια σε πολλά μαντεία: *(μερική) $\mathcal{C}$-αναδρομική*, όπου $\mathcal{C}$ είναι μία κλάση από συναρτήσεις και/ή σύνολα.

Μαντεία II

Ορισμός

$A \leqslant_T B$ (A ανάγεται κατά Turing στο B):
A είναι B-αναδρομική.

Παρατήρηση: Παρόμοιες ιδιότητες και έννοιες όπως για $\leqslant_m$

- $\leqslant_T$ είναι ανακλαστική και μεταβατική.
- $\equiv_T$: είναι η προκύπτουσα αντίστοιχα σχέση ισοδυναμίας, η Turing ισοδυναμία· Turing βαθμός μη επιλυσιμότητας: $d(A) =$ κλάση ισοδυναμίας του A.
- $d(\emptyset)$: μικρότερος βαθμός, βαθμός των αναδρομικών συνόλων.
- Δεν υπάρχει μεγαλύτερος βαθμός: $\forall A\colon d(A) < d(A^K)$
- $d(K)$ είναι μεγιστικός βαθμός μεταξύ των αναδρομικά αριθμήσιμων συνόλων.
- Υπάρχουν αναδρομικά αριθμήσιμα σύνολα A, B τέτοια ώστε δεν ισχύει ούτε $A \leqslant_T B$ ούτε $B \leqslant_T A$.
- $\leqslant_T$-hard, $\leqslant_T$-complete. ($\leqslant_T$-δύσκολο, $\leqslant_T$-πλήρες.)
- K είναι $\leqslant_T$-complete στο RE (αναδρομικά αριθμήσιμα σύνολα)

Μαντεία III

Ορισμός

Μία σχέση R είναι αριθμητική αν ορίζεται στην αριθμητική (δηλαδή την σχεσιακή δομή: $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}; <; S; +; *; 0 \rangle$).

Θεώρημα (Gödel)

R είναι r.e. (αναδρομικά αριθμήσιμη) $\Longrightarrow$ R είναι αριθμητική.

Απόδειξη.

Επαγωγή στο $\mathcal{PR}$. $\square$

Η αριθμητική ιεραρχία Ι

$\Sigma_1^0 = \text{RE} = \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \exists \underline{y} R(\underline{x}, \underline{y}),\ R$ αναδρομική$\}$

$\Pi_1^0 = \text{co-RE} =$ συμπληρώματα συνόλων του RE $= \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \forall \underline{y} R(\underline{x}, \underline{y}),\ R$ αναδρομική$\}$

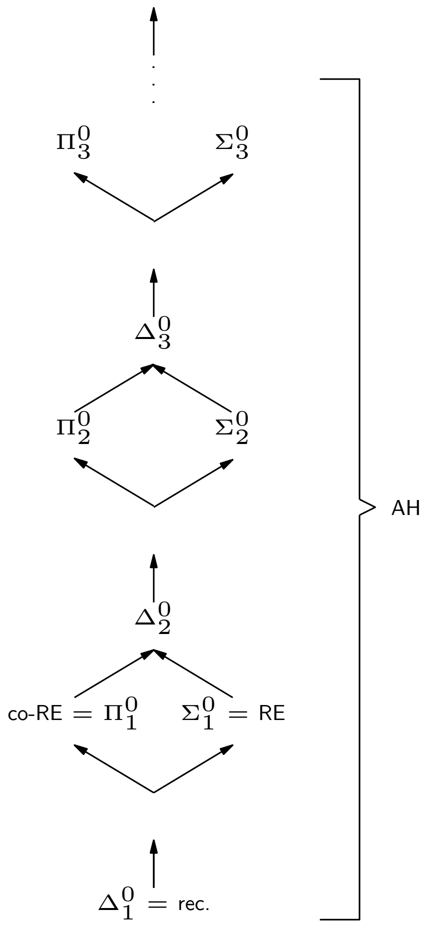
και γενικά:

$\Sigma_{n+1}^0 = \Pi_n^0\text{-RE} = \{S \mid S(\underline{x}) \leftrightarrow \exists \underline{y} R(\underline{x}, \underline{y}), R \in \Pi_n^0\}$

$\Pi_{n+1}^0 = \text{co-}\Sigma_{n+1}^0 =$ συμπληρώματα συνόλων του Σ_{n+1}^0

$\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$

Παράδειγμα: $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall x_6 \exists x_7 \forall x_8 \forall x_9 R(\underline{x})$ στο Π_5^0 αν R: αναδρομική.



Σχήμα: Η αριθμητική ιεραρχία

Η αριθμητική ιεραρχία III

Θεώρημα

Οι εγκλεισμοί στην αριθμητική ιεραρχία είναι γνήσιοι.

Θεώρημα

Μία σχέση R είναι αριθμητική ανν υπάρχει k τ.ω. $R \in \Sigma_k^0$.

Το 10ο πρόβλημα του Hilbert I

Το 1900 στο Παρίσι, ο David Hilbert έκανε μια ομιλία για τα 23 πιο σπουδαία μαθηματικά προβλήματα που κληρονομούσε ο 20ος αιώνας από τον 19ο. Το 10ο ήταν:

Απόφανση περί επιλυσιμότητας μιας Διοφαντικής εξίσωσης

δηλαδή να ευρεθεί **αλγόριθμος** που δεδομένου ενός **πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές** να αποφασίζει αν έχει **ακέραιες ρίζες**.

Μία τέτοια εξίσωση

$$D(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

όπου D πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές λέγεται **Διοφαντική** προς τιμήν του Έλληνα (Αλεξανδρινού) μαθηματικού Διόφαντου, που έζησε τον 3ο αιώνα μ.Χ.

Έως το 1900, υπήρχαν μέθοδοι επίλυσης (θετικής ή αρνητικής) για διάφορες υποκατηγορίες των Διοφαντικών εξισώσεων, ο Hilbert όμως ζητούσε μία **καθολική μέθοδο**, δηλαδή αλγόριθμο απόφασης, για όλες τις Διοφαντικές εξισώσεις.

Το 10ο πρόβλημα του Hilbert II

Με χρήση του θεωρήματος Lagrange (κάθε φυσικός είναι άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων), μπορεί να δείξει κανείς ότι τα εξής δύο προβλήματα απόφασης ανάγονται το ένα στο άλλο (είναι **ισοδύναμα** ως προς $\equiv_m$):

- Επιλυσιμότητα Διοφαντικής εξίσωσης με *ακεραίους*.
- Επιλυσιμότητα Διοφαντικής εξίσωσης με *φυσικούς*.

Θεώρημα (DMPR)

Το 10ο πρόβλημα του Hilbert είναι **μη επιλύσιμο**.

Και μάλιστα κατασκευαστικά:

Θεώρημα

Υπάρχει αλγόριθμος που, δεδομένου αλγορίθμου A που δήθεν επιλύει το 10ο πρόβλημα του Hilbert, κατασκευάζει Διοφαντική εξίσωση αντιπαράδειγμα.

Δηλαδή υπάρχει $\leqslant_m$-αναγωγή, άρα το πρόβλημα είναι RE-πλήρες.

Εικασία Davis I

Ας θεωρήσουμε οικογένειες από παραμετρικές Διοφαντικές εξισώσεις:

$$D(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

- ακέραιοι συντελεστές
- παράμετροι $a_1, \ldots, a_n$
- άγνωστοι $x_1, \ldots, x_m$.

Για ποιες τιμές των παραμέτρων a_i έχει η D ακέραιες ρίζες;

Εικασία Davis II

Ορισμός

Διοφαντικό σύνολο:
$\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \exists (x_1, \ldots, x_m) \colon D(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n) = 0\}$,
όπου D: Διοφαντική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.

Παράβαλε *αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο:*

$$\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \exists (x_1, \ldots, x_m) \colon f(x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n) = 0\},$$

όπου f: αναδρομική συνάρτηση.

Παρατήρηση

Αν η συνάρτηση D στο ορισμό του διοφαντικού συνόλου είναι ένα πολυώνυμο ως προς τους αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_m$ τότε το σύνολο ονομάζεται **πολυωνυμικά** διοφαντικό σύνολο.
Αν στη συνάρτηση D επιτρέπεται να υπάρχει άγνωστη μεταβλητή $(x_1, \ldots, x_m)$ σε εκθέτη, τότε το σύνολο ονομάζεται **εκθετικά** διοφαντικό.

Εικασία Davis III

Παράδειγμα

NQ $= \{n \mid n$ όχι τέλειο τετράγωνο$\}$ είναι διοφαντικό σύνολο διότι
NQ $= \{d \mid \exists (x,y) \colon x^2 - d(y+1)^2 - 1 = 0\}$ (εξίσωση του Pell).

Προφανώς κάθε Διοφαντικό σύνολο είναι (καταγράψιμο) αναδρομικά αριθμήσιμο.

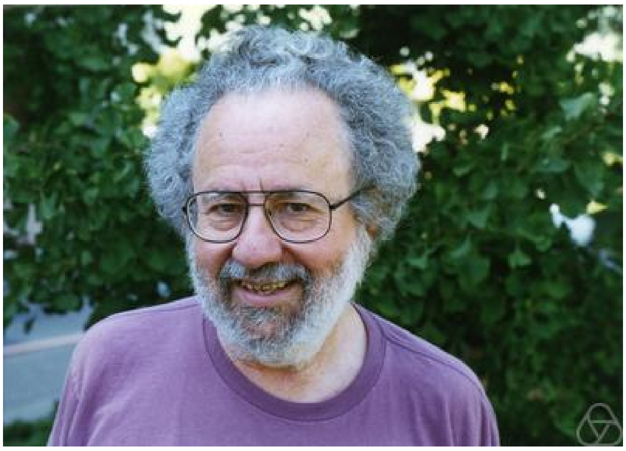
Παρατήρηση

Και οι δύο κλάσεις D και RE είναι κλειστές ως προς ένωση και τομή όχι όμως ως προς συμπλήρωμα.

Εικασία Davis IV

Εικασία (Davis, 1950)

Κάθε αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο είναι διοφαντικό.



Martin Davis

Εικασία Davis V

Μία συνέπεια αυτής της εικασίας είναι ότι το σύνολο PRIMES είναι διοφαντικό, άρα περιγράφεται με μια πολυωνυμική εξίσωση! Το ίδιο ισχύει και για το σύνολο POWERS-OF-2.

Μια άλλη συνέπεια ("Davis Normal Form", παράβαλε KNF) είναι η ύπαρξη καθολικής (universal) Διοφαντικής εξίσωσης $[U_n(\underline{a}, k, \underline{y}) = 0]$ που περιγράφει (με index k) κάθε r.e. σύνολο:

$$\forall D, \exists k, \forall \underline{a}\ [\exists \underline{x} D(\underline{a}, \underline{x}) = 0 \leftrightarrow \exists \underline{y}(U_n(\underline{a}, k, \underline{y}) = 0]$$

Εικασία Davis VI

Ο Martin Davis απέδειξε αμέσως:

Θεώρημα (Davis Normal Form)

Κάθε r.e. σύνολο περιγράφεται:

$$\{\underline{a} | \exists z, \forall y \leqslant z, \exists \underline{x}\; p(\underline{a}, \underline{x}, y, z) = 0\}$$

δηλαδή το σύνολο των παραμέτρων $\underline{a}$ ώστε όλα τα πολυώνυμα

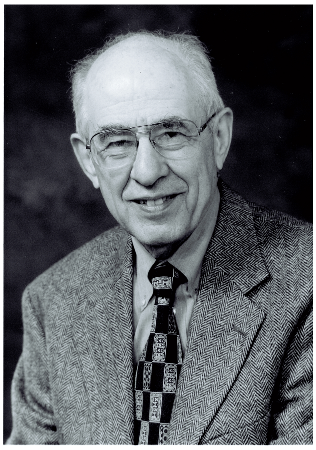
$$p(\underline{a}, \underline{x}, 0, z), p(\underline{a}, \underline{x}, 1, z), \ldots, p(\underline{a}, \underline{x}, z, z)$$

να έχουν ρίζα.

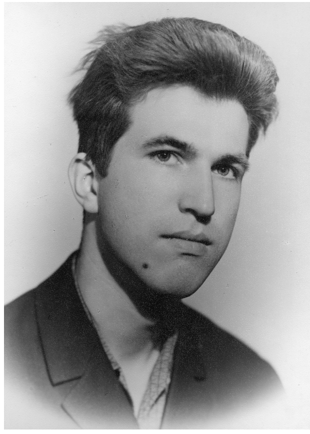
Το ζητούμενο τώρα ήταν να απαλειφθεί ο καθολικός ποσοδείκτης για να αποδειχτεί η εικασία Davis. Αυτό έγινε μετά από τουλάχιστον 20 χρόνια.

J. Robinson, H. Putnam, Y. Matiyasevich I

Julia Robinson



Hilary Putnam



Yuri Matiyasevich

J. Robinson, H. Putnam, Y. Matiyasevich II

Εικασία (J. Robinson)

Υπάρχει διοφαντικό σύνολο ζευγαριών D τέτοιο ώστε:

1. $(a, b) \in D : b \leqslant a^a$ *και*
2. $\forall k, \exists (a, b) \in D : b > a^k$

Ορισμός

Το σύνολο $D = \{(a, b, c) \mid a = b^c\}$ ονομάζεται **σχέση εκθετικής αυξητικότητας** ή σχέση Julia Robinson.
Παρατήρηση: Μέχρι την δεκαετία 1960 δεν ήταν γνωστό στους αριθμοθεωρητικούς αν υπάρχει τέτοιο σύνολο D.

Η Julia Robinson (μαθήτρια του Tarski στο Berkeley) που μελετούσε την διοφαντικότητα του συνόλου POWERS-OF-2 απέδειξε το 1950 ότι η εικασία J. Robinson *συνεπάγεται* ότι η σχέση εκθετικής αυξητικότητας είναι διοφαντικό σύνολο.

Εικασία (PAP)

Υπάρχουν αριθμητικές πρόοδοι πρώτων αριθμών, αυθαιρέτου μήκους.

J. Robinson, H. Putnam, Y. Matiyasevich III

O Davis μαζί με τον φιλόσοφο (Harvard) Hilary Putnam μελέτησαν εκθετικές διοφαντικές εξισώσεις (π.χ. $(x+1)^a + (y+1)^a = (z+1)^a$, Fermat: μόνον για $a = 1, 2$) και έδειξαν το 1959 ότι:

$$\text{εικασία PAP} + \text{εικασία J. Robinson} \Rightarrow \text{εικασία Davis}$$

Δυστυχώς η εικασία PAP δεν είχε αποδειχτεί τότε. Όμως η J. Robinson κατόρθωσε να αντικαταστήσει την εικασία PAP με κάτι σχετικό με το θεώρημα πρώτων αριθμών.

Παρατήρηση

Η εικασία PAP απεδείχθει το 2004 από τους Ben Green και Terence Tao και ως εκ τούτου είναι πλέον γνωστή με την ονομασία Θεώρημα Green-Tao.

J. Robinson, H. Putnam, Y. Matiyasevich IV

Έτσι, έχουμε:

Θεώρημα (DPR)

1. *Κάθε r.e. σύνολο είναι εκθετικά διοφαντικό.*
2. *Η εικασία J. Robinson είναι ισοδύναμη με: Κάθε r.e. σύνολο είναι (πολυωνυμικά) διοφαντικό.*

Παρατήρηση

Η εικασία J.R. είναι ισοδύναμη με: $\{(a, b, a^b)\}$ είναι (πολυωνυμικά) διοφαντικό.

Τέλος, ο (νεαρός, 22 ετών) Yuri Matiyasevich απέδειξε το 1970 την εικασία της J. Robinson. Έδειξε δηλαδή ότι υπάρχει σχέση που ορίζει ακριβώς την εκθετική αυξητικότητα της J. Robinson και μάλιστα η σχέση είναι

$$\{(a, b) \mid b = Fib_{2a}\}.$$

Χρησιμοποίησε μια ιδιότητα των αριθμών Fibonacci που αυτός απέδειξε:

$$Fib_n^2 | Fib_m \rightarrow Fib_n | m.$$

J. Robinson, H. Putnam, Y. Matiyasevich V

Παρατίθενται πιο ισχυρές παραλλαγές του θεωρήματος DMPR.

Θεώρημα

Υπάρχει Διοφαντική εξίσωση W με μία παράμετρο a: $W(a, \underline{x}) = 0$ έτσι ώστε το $\{a \mid \exists \underline{x} \in N^m : W(a, \underline{x}) = 0\}$ είναι μη επιλύσιμο.

Θεώρημα

Εκτός από την παραπάνω W υπάρχει αλγόριθμος που για κάθε αλγόριθμο f μας βρίσκει ένα a_f έτσι ώστε ο f να μην αποφασίζει σωστά αν η $W(a_f, \underline{x})$ έχει ρίζα.

Γενικεύσεις Ι

Παρατήρηση

Αν το 10ο πρόβλημα του Hilbert είχε θετική επίλυση για ακέραιους τότε θα είχε και για ρητούς. Τώρα όμως παραμένει ανοικτό το πρόβλημα για ρητούς.

- Το θεώρημα DMPR έδωσε "αρνητική" λύση στο διάσημο 10ο Πρόβλημα του Hilbert, είναι η πιο σημαντική εφαρμογή της Λογικής στα κλασικά μαθηματικά, και ώθησε τη δημιουργία μιας καινούριας ερευνητικής περιοχής: HTP, από το αγγλικό Hilbert's Tenth Problem.
- Τα βασικά προβλήματα της HTP είναι η αποκρισιμότητα των θεωριών για δομές που προκύπτουν με φυσικό τρόπο στην Άλγεβρα, τη Θεωρία Αριθμών και την Αλγεβρική Γεωμετρία.
- Χαρακτηριστικό της HTP είναι ότι οι αποδείξεις δεν είναι απλές, και τείνουν να χρησιμοποιούν αποτελέσματα και μεθόδους από κλασικά μαθηματικά, έξω από τη Λογική. Και όμως, τα αποτελέσματα Θεωρίας Αριθμών που απαιτούνται για την απόδειξη του DMPR είναι σχετικά απλά —κλασικές ιδιότητες της εξίσωσης Pell.
- Από την άλλη μεριά, το ανάλογο ερώτημα για τη δομή των ρητών αριθμών έχει αντισταθεί στις προσπάθειες πολλών διακεκριμένων μαθηματικών (από πολλούς, συναφείς κλάδους) και παραμένει το βασικό ανοικτό πρόβλημα αυτής της περιοχής:

  Υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει αν το τυχαίο πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές έχει ρητές λύσεις;

Γενικεύσεις ΙΙ

- Έτσι η περιοχή HTP είναι ευλογημένη από ένα κλασικό θεώρημα (το DMPR), και ένα κεντρικό και (κατά γενική ομολογία) πολύ δύσκολο ανοικτό πρόβλημα και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι είναι κάπου ανάμεσα στη Λογική, τη Θεωρία Αριθμών και την Αλγεβρική Γεωμετρία.