Μη επιλυσιμότητα Ι

Θεώρημα

Το ΤΟΤ (πρόβλημα ολικής συνάρτησης) είναι μη επιλύσιμο, δηλαδή η f δεν είναι αναδρομική όπου:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \varphi_x \text{ είναι ολική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη.

Ορίζουμε

$$h(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1, & \text{αν } f(x)=1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \varphi_x(x)+1, & \text{αν } \varphi_x \text{ ολική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Όπως στο προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση h θα ήταν υπολογίσιμη αν υποθέταμε ότι η f ήταν αναδρομική, άρα η h θα ήταν (ολική) αναδρομική, άρα θα είχε κάποιο δείκτη y. Τότε:

$$\underline{\varphi_y(y)} = h(y) = \begin{cases} \varphi_y(y)+1, & \text{αν } \varphi_y \text{ ολική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \underline{\varphi_y(y)+1}, \text{ αφού } \varphi_y \text{ ολική}$$

Άτοπο. □

Αναγωγές

Δηλαδή: δεν υπάρχει αλγόριθμος που να μπορεί να αποφασίζει αν ένα δεδομένο πρόγραμμα σταματά για όλες τις δυνατές εισόδους.

Παρόμοια αποδεικνύεται ότι: δεν υπάρχει αλγόριθμος που να μπορεί να αποφασίσει αν δυο δεδομένα προγράμματα είναι ισοδύναμα (δηλαδή έχουν την ίδια συμπεριφορά εισόδου - εξόδου).

Αντί να δείχνουμε κατευθείαν (δηλαδή με διαγωνιοποίηση) ότι ένα τέτοιο πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την ακόλουθη **μέθοδο αναγωγής** (reduction):

> *Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι υπολογίσιμη, ανάγουμε το HP στην f, δηλαδή, δείχνουμε ότι αν ήταν υπολογίσιμη η f τότε θα ήταν επιλύσιμο το HP (πράγμα που δεν αληθεύει!).*

Θεώρημα *S-m-n* I

Θεώρησε ένα πρόγραμμα π με δυο εισόδους a, b για τις μεταβλητές y και z. Τώρα (κρατήστε το y σαν παράμετρο) φτιάξε ένα νέο πρόγραμμα

$$\pi' : \ y := a; \ \pi$$

με μόνο μια είσοδο b για την μεταβλητή z. Η έξοδος είναι η ίδια. Έτσι αν ο κωδικός του π είναι x και ο κωδικός του π' είναι s ισχύει:

$$\varphi_x(a, z) \simeq \varphi_s(z)$$

Παρατηρούμε ότι ο κωδικός του π' μπορεί να υπολογιστεί βάσει του κωδικού του $y := a$ και του κωδικού του π, με απλό τρόπο. Άρα η s είναι (LOOP-)υπολογίσιμη συνάρτηση του x και του y, δηλαδή $s(x, y)$ και συνεπώς:

Θεώρημα παραμέτρων. $\exists s \in \mathcal{P}, \ \forall x, y, z \quad \varphi_x(y, z) \simeq \varphi_{s(x,y)}(z)$

Και γενικά (για πολλές μεταβλητές και πολλές παραμέτρους):

Θεώρημα *S-m-n*.
$\exists S^n_m \in \mathcal{P}, \ \forall x, \vec{y}, \vec{z} \quad \varphi_x(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \simeq \varphi_{S^n_m(x, y_1, \ldots, y_m)}(z_1, \ldots, z_n)$

Θεώρημα *S-m-n* II

Θεώρημα

Υπάρχει $g \in \mathcal{P}$ ώστε $\varphi_x(\varphi_y(z)) \simeq \varphi_{g(x,y)}(z)$. (Δηλαδή ο κωδικός της παράθεσης δυο προγραμμάτων, $\pi_1; \pi_2$, είναι υπολογίσιμος βάσει των κωδικών των π_1 και π_2).

Απόδειξη.

Θεώρησε ένα καθολικό πρόγραμμα: $\omega'(x, y, z) \simeq (\pi_1; \pi_2)(z)$, όπου:
$y =$ κωδικός(π_1), $x =$ κωδικός(π_2) και $z =$ είσοδος για π_1.

Το ω' έχει (έστω) δείκτη u: $\varphi_u(x, y, z) \simeq \varphi_x(\varphi_y(z))$.

Λόγω του *S-m-n* έχουμε: $\varphi_u(x, y, z) \simeq \varphi_{S_1^2(u,x,y)}(z)$.

'Αρα: $\varphi_x(\varphi_y(z)) \simeq \varphi_{S_1^2(u,x,y)}(z)$, οπότε θέτουμε: $g(x, y) = S_1^2(u, x, y)$ □

Παράδειγμα αναγωγής Ι

Θεώρημα

Το CONST (πρόβλημα σταθερής συνάρτησης) είναι μη επιλύσιμο, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι αναδρομική, όπου:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \varphi_x \text{ σταθερή συνάρτηση} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη:
Ορίζουμε:

$$h(x,y) \simeq \begin{cases} 5, & \text{αν } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η h είναι υπολογίσιμη:

- βρες το x-οστό πρόγραμμα,
- τρέξε το με είσοδο x,
- αν και όταν σταματήσει δώσε έξοδο 5.

Παράδειγμα αναγωγής II

Λόγω της θέσης Church-Turing η h είναι μερική αναδρομική. Λόγω της κανονικής μορφής Kleene η h έχει δείκτη (έστω) u: $\varphi_u(x,y) \simeq h(x,y)$. Λόγω του S-m-n: $\varphi_{S(u,x)}(y) \simeq h(x,y)$. Θέτουμε $g(x) = S(u,x)$. Έτσι έχουμε $\varphi_{g(x)}(y) \simeq h(x,y)$ και η g είναι υπολογίσιμη.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την f:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \varphi_{g(x)} \text{ σταθ. συν.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{h(x,y)=5, } \forall y \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \text{HP}$$

Αν η f ήταν υπολογίσιμη τότε και η σύνθεση $f(g(\cdot))$ θα ήταν υπολογίσιμη δηλαδή το HP θα ήταν επιλύσιμο. □

Παράδειγμα αναγωγής III

Άσκηση: Δείξτε με αναγωγή ότι τα εξής προβλήματα δεν είναι επιλύσιμα:

1. $\{(x, y) \mid \varphi_x = \varphi_y\}$
2. $\{(x, y, z) \mid \varphi_x(y) = z\}$
3. $\{x \mid$ το πεδίο της φ_x είναι άπειρο$\}$

Παρατήρηση

Ας διαφοροποιήσουμε τώρα τις δυο εκδοχές του HP που έχουμε χρησιμοποιήσει για να είμαστε ακριβείς:

- $K_0 = \{(x, y) \mid \varphi_x(y) \downarrow\}$
- $K = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\}$

Θεώρημα Rice I

Η παραπάνω τεχνική αναγωγής του HP μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ένα πολύ πιο γενικό αποτέλεσμα:

> *Κάθε μη τετριμμένη ιδιότητα υπολογίσιμων συναρτήσεων αντιπροσωπεύει ένα μη επιλύσιμο πρόβλημα (Θεώρημα Rice).*

Πριν την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος του Rice θα πρέπει να διευκρινίσουμε κάτι πολύ σημαντικό. Οποιαδήποτε τεχνική απαρίθμησης κι αν εφαρμόσουμε για τις μερικές αναδρομικές συναρτήσεις (είτε μέσω προγραμμάτων **while**, είτε μέσω του μαθηματικά ορισμένου επαγωγικού πεδίου κ.τ.λ.), δεν μπορούμε να πετύχουμε μονοσήμαντη κωδικοποίηση για μια συνάρτηση (αναφερόμαστε στην ουσία της συνάρτησης). Δηλαδή μια συνάρτηση, στις διάφορες ισοδύναμες μορφές της, θα αντιστοιχεί σε πολλούς δείκτες στην απαρίθμηση. Έτσι το σύνολο C που αναφέρεται στο θεώρημα του Rice είναι σύνολο συναρτήσεων και όχι σύνολο δεικτών.

Ορισμός

$\mathcal{PR}^1$: Η κλάση των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων με ένα όρισμα.

Θεώρημα Rice II

Θεώρημα (Rice)

Έστω $C \subsetneq \mathcal{PR}^1$, $C \neq \varnothing$. Τότε το $\{x \mid \varphi_x \in C\}$ είναι μη επιλύσιμο, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι αναδρομική, όπου:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \varphi_x \in C \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη:
Έστω k μια συνάρτηση της κλάσης C. Έστω Ω η πουθενά ορισμένη συνάρτηση, δηλαδή $\Omega(x) = \uparrow$, $\forall x$.

Περίπτωση 1: $\Omega \notin C$.

$$\text{Ορίζουμε:} \quad h(x,y) \simeq \begin{cases} k(y), & \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θεώρημα Rice III

Όπως στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε: $\varphi_{g(x)}(y) \simeq h(x,y)$ και g είναι υπολογίσιμη. Τότε, αφού $\Omega \notin C$:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \varphi_{g(x)} \in C \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \varphi_{g(x)} \simeq k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \varphi_x(x)\downarrow \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \mathsf{HP}$$

Συνεπώς η f δεν είναι υπολογίσιμη.

Περίπτωση 2: $\Omega \in C$. Αλλά τότε το Ω δεν ανήκει στο $\overline{C}$. Δείχνουμε ομοίως ότι: $\{x \mid \varphi_x \in \overline{C}\}$ μη επιλύσιμο. Αλλά τότε και το συμπλήρωμά του δεν είναι επιλύσιμο:

$$\overline{\{x \mid \varphi_x \in \overline{C}\}} = \{x \mid \varphi_x \in C\}$$

□

Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής (Θεώρημα σταθερών τιμών) I

Θεώρημα (Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής (θεώρημα σταθερών τιμών))

$$\forall f \in \mathcal{PR}\ \exists\ n : \varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$$

[ισοδύναμη εκφώνηση: $\forall z\ \exists\ n : \varphi_n \simeq \varphi_{\varphi_z(n)}$*]*

Παρατήρηση

Αν $f(n) = \uparrow$ τότε $\varphi_{f(n)} = \Omega$.

Το θεώρημα της αναδρομής λέει για ότι για κάθε αναδρομική συνάρτηση f που αντιστοιχεί δείκτες μερικών αναδρομικών συναρτήσεων σε δείκτες μερικών αναδρομικών συναρτήσεων, υπάρχει ένα σταθερό σημείο n, ώστε η μερική αναδρομική συνάρτηση με δείκτη n να είναι ισοδύναμη με τη μερική αναδρομική συνάρτηση με δείκτη $f(n)$.

Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής (Θεώρημα σταθερών τιμών) II

Με άλλα λόγια, αν μετασχηματίσουμε όλα τα προγράμματα **while** κατά ένα συγκεκριμένο τρόπο (π.χ. προσθέτοντας στο τέλος τους μια εντολή $y := y + 1$, όπου y η έξοδος), θα υπάρχει ένα πρόγραμμα **while** π_n που θα είναι ισοδύναμο με το μετασχηματισμένο πρόγραμμα $\pi_{f(n)}$ (στο συγκεκριμένο παράδειγμα ένα πρόγραμμα που πέφτει σε άπειρο loop).

Συνέπεια των θεωρημάτων αναδρομής είναι και το ότι υπάρχει self reproducing program (quine) πρόγραμμα του οποίου η έξοδος είναι ακριβώς το κείμενο του ίδιου του προγράμματος.

Θα κατασκευάσουμε ένα σκαρίφημα για ένα τέτοιο πρόγραμμα. Η συνάρτηση dq (doublequotes, που δεν υλοποιούμε λεπτομερώς) διπλασιάζει κάθε quote " ' ". Για να εμφανιστεί στην έξοδο μία συμβολοσειρά που περιέχει ένα quote, πχ. blah'blah, η εντολή πρέπει να έχει δύο quotes, δηλ είναι write('blah''blah'). Θεωρούμε ότι το πρόγραμμα είναι γραμμένο σε μία γραμμή (δεν χωράει σε μία γραμμή στην σελίδα, για αυτό το γράφουμε σε δύο):

Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής (Θεώρημα σταθερών τιμών) III

Παράδειγμα (Quine σε ψευδοκώδικα)

```
x:=';y:=dq(x);write("x:=""", y, """", x)';y:=dq(x);write('x:="', y, '"', x)
```

Trace:

```
x : ;y:=dq(x);write('x:="', y, '"', x)
y : ;y:=dq(x);write("x:=""", y, """", x)
```

Output:

```
x:=';y:=dq(x);write("x:=""", y, """", x)';y:=dq(x);write('x:="', y, '"', x)
```

Δεύτερο Θεώρημα Αναδρομής (Θεώρημα σταθερών τιμών) IV

Παράδειγμα (Quine σε python)

```
> cat quine.py
x='x=%r;print x%%x';print x%x

> python quine.py
x='x=%r;print x%%x';print x%x
```

Εξήγηση:

Εντολή 1: `x = 'x=%r;print x%%x'`

Εντολή 2: `print x%x`

Trace:

```
x   : "x=%r;print x%%x"
x%x : "x='x=%r;print x%%x';print x%x"
```

Γενικά: x%y δίνει ως αποτέλεσμα τη συμβολοσειρά x με τη διαφορά ότι στη θέση του %r υπάρχει πλέον το *representation* της y, δηλαδή η τιμή της συμβολοσειράς y μαζί με τα μονά εισαγωγικά γύρω της, και στη θέση του %% υπάρχει πλέον μόνο ένα σύμβολο % [http://pyformat.info για περισσότερες πληροφορίες].

Άλλη εκδοχή δεύτερου θεωρήματος αναδρομής Ι

Θεώρημα (Άλλη εκδοχή θεωρήματος αναδρομής)

$$\exists r \in \mathcal{R} \ \forall \ z : \varphi_{r(z)} \simeq \varphi_{\varphi_z(r(z))}$$

Δηλαδή μπορούμε μηχανιστικά να υπολογίσουμε το n του πρώτου θεωρήματος.

Απόδειξη:
Για το πρώτο: Ορίζουμε $h(x,u) \simeq \varphi_{\varphi_x(x)}(u)$.
Η h είναι υπολογίσιμη. Όπως παραπάνω, υπάρχει g υπολογίσιμη ώστε:

$$\varphi_{g(x)}(u) \simeq h(x,u).$$

Η σύνθεση $f(g(\cdot))$ είναι υπολογίσιμη.
Άρα έχει δείκτη, έστω y: $\varphi_y(.) \simeq f(g(.))$.
Άρα: $\varphi_y(y) \simeq f(g(y))$
και: $\varphi_{f(g(y))} \simeq \varphi_{\varphi_y(y)} \simeq \varphi_{g(y)}$
θέτουμε $n = g(y)$.

Για το δεύτερο: Παρατηρούμε ότι η κατασκευή του π ήταν μηχανιστική, δηλαδή δείκτης y μπορεί να υπολογιστεί και η g είναι υπολογίσιμη.