Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης

4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 20/2/2015

Άσκηση 1: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Συντομότερων Μονοπατιών

Θεωρούμε ένα (ισχυρά συνεκτικό) κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w)$ με n κορυφές, m ακμές, και (ενδεχομένως αρνητικά) μήκη w στις ακμές. Συμβολίζουμε με $d(u, v)$ την απόσταση των κορυφών u και v στο G.

(α) Δίνονται n αριθμοί $\delta_1, \dots, \delta_n$, όπου κάθε δ_k (υποτίθεται ότι) ισούται με την απόσταση $v_1 - v_k$ στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν τα $\delta_1, \dots, \delta_n$ πράγματι ανταποκρίνονται στις αποστάσεις των κορυφών από την v_1, δηλαδή αν για κάθε $v_k \in V$, ισχύει ότι $\delta_k = d(v_1, v_k)$. Αν αυτό αληθεύει, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει ένα Δέντρο Συντομότερων Μονοπατιών με ρίζα τη v_1.

(β) Έστω ότι υπολογίσαμε τις αποστάσεις $d(v_i, v_j)$ μεταξύ κάθε (διατεταγμένου) ζεύγους κορυφών $(v_i, v_j) \in V \times V$. Στη συνέχεια, το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ μειώνεται σε $w'(x, y) < w(x, y)$. Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n^2)$ που αναπροσαρμόζει τις αποστάσεις μεταξύ όλων των κορυφών (εφόσον βέβαια η μείωση δεν δημιουργεί κύκλο αρνητικού μήκους!).

(γ) Τι αλλάζει, σε σχέση με το (β), αν το μήκος μιας ακμής $e = (x, y)$ αυξηθεί σε $w'(x, y) > w(x, y)$; Μπορείτε να επεκτείνετε τον αλγόριθμο του (β) σε αυτή την περίπτωση; Αν ναι, να περιγράψετε την επέκταση του αλγορίθμου, αν όχι, να εξηγήσετε συνοπτικά τις βασικές διαφορές / δυσκολίες.

Άσκηση 2: Σύστημα Ανισοτήτων και Μετατροπή Σταθερών Όρων

Έστω $x_1, \dots, x_n$ ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε σύστημα S αποτελούμενο από m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \le b_{ij}$, για κάποια $1 \le i, j \le n$, όπου τα b_{ij} είναι ακέραιοι. Το S είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες.

(α) Να διατυπώσετε ένα κριτήριο για το αν το S είναι ικανοποιήσιμο (και να αποδείξετε την ορθότητα του κριτηρίου σας). Με βάση αυτό το κριτήριο, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που διαπιστώνει αν το S είναι ικανοποιήσιμο ή όχι. Αν το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο, ο αλγόριθμός σας πρέπει να υπολογίζει αποδεκτές τιμές για τις μεταβλητές $x_1, \dots, x_n$. Ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;

(β) Θέλουμε να μετατρέψουμε το S σε ένα *ισοδύναμο* σύστημα S' με αντίστοιχες ανισότητες $x_i - x_j \le b'_{ij}$, όπου η μοναδική διαφορά είναι ότι οι σταθεροί όροι b'_{ij} είναι μη αρνητικοί. Τα S και S' είναι *ισοδύναμα* όταν το S' είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το S είναι ικανοποιήσιμο. Για τον σκοπό αυτό, μπορούμε να τροποποιήσουμε τους σταθερούς όρους του S (μόνο) μέσω μιας διαδικασίας $\text{Change}(S, i, k)$ που προσθέτει τον αριθμό k σε όλα τα b_{ij}, $1 \le j \le n$, και αφαιρεί τον k από όλα τα $b_{\ell i}$, $1 \le \ell \le n$. Θέλουμε να διαπιστώσουμε αν με διαδοχικές κλήσεις της Change, το αρχικό σύστημα S μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο σύστημα S' με όλα τα $b'_{ij} \ge 0$. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα (υποθέστε εδώ ότι το S περιλαμβάνει $m = \Theta(n \log^2 n)$ ανισότητες). Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας. Αν το S' είναι ικανοποιήσιμο, να δείξετε ακόμη πως μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά μια αποδεκτή λύση του S από μια αποδεκτή λύση του S'.

Άσκηση 3: Συντομότερα Μονοπάτια με Δύο Κριτήρια

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$ με n κορυφές, m ακμές, θετικά μήκη w και μη αρνητικά κόστη c στις ακμές. Έστω ακόμη μια αρχική κορυφή s του G.

(α) Αρχικά υποθέτουμε ότι για κάθε ακμή e, $c(e) \in \{0, 1\}$. Ας ονομάσουμε μια ακμή e πράσινη, αν $c(e) = 0$, και κόκκινη, αν $c(e) = 1$. Να διατυπώσετε αποδοτικό αλγόριθμο που για κάθε κορυφή $u \in V$, υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s - u$ μονοπατιού που περιέχει το πολύ μία κόκκινη ακμή. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Να γενικεύσετε τον αλγόριθμο του (α) ώστε για κάθε κορυφή $u \in V$, να υπολογίζει το μήκος του συντομότερου $s - u$ μονοπατιού που περιέχει το πολύ k κόκκινες ακμές, για δεδομένο φυσικό $k \geq 1$. Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του γενικευμένου αλγόριθμου; Είναι ο αλγόριθμός σας πολυωνυμικού χρόνου (να αιτιολογήσετε);

Άσκηση 4: Επιβεβαίωση και Αναπροσαρμογή Μέγιστης Ροής

Θεωρούμε ένα (κατευθυνόμενο) $s - t$ δίκτυο $G(V, E, c)$ με n κορυφές, m ακμές, και (θετικές) ακέραιες χωρητικότητες c στις ακμές.

(α) Δίνεται μια ροή f που (υποτίθεται ότι) αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G. Να διατυπώσετε αλγόριθμο γραμμικού χρόνου που ελέγχει αν η f αποτελεί πράγματι μια μέγιστη ροή στο G. Να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω ότι η f αποτελεί μια μέγιστη ροή στο G, αλλά ανακαλύπτουμε ότι η πραγματική χωρητικότητα μιας ακμής e είναι μικρότερη κατά k μονάδες, $1 \leq k \leq c_e$, από τη χωρητικότητα c_e που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που (εφόσον χρειάζεται) τροποποιεί την f σε μία μέγιστη ροή f' για το δίκτυο G' που προκύπτει από το G θέτοντας $c'_e = c_e - k$. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σας πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον χρόνο υπολογισμού μιας μέγιστης ροής εξ' αρχής.

Άσκηση 5: Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι **NP**-Πλήρη:

Υποσύνολα Διαφορετικών Συνόλων
Είσοδος: Σύνολα φυσικών αριθμών $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ και $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ και φυσικός $B \geq 1$.
Ερώτηση: Υπάρχουν μη κενά υποσύνολα $S_1 \subseteq X$ και $S_2 \subseteq Y$ με $|x(S_1) - y(S_2)| = B$;

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση
Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \dots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.
Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Συνδετικό Δέντρο Περιορισμένο ως προς τον Μέγιστο Βαθμό
Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq n - 1$.
Ερώτηση: Υπάρχει υπάρχει συνδετικό δέντρο (spanning tree) T του G τέτοιο ώστε κάθε κορυφή v να έχει βαθμό (στο T) μικρότερο ή ίσο του k;

Διαχωρισμός σε Κλάσεις (Clustering)
Είσοδος: Σύνολο $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ με n σημεία, οι αποστάσεις $d(p_i, p_j) = d(p_j, p_i) \in \mathbb{N}$ για όλα τα ζευγάρια διαφορετικών σημείων στο P, και θετικοί φυσικοί B και $k \geq 3$.
Ερώτηση: Υπάρχει διαμέριση του P σε k κλάσεις $P_1, \dots, P_k$ έτσι ώστε για κάθε κλάση P_ℓ και για κάθε ζευγάρι σημείων $p_i, p_j \in P_\ell$, $d(p_i, p_j) \leq B$ (δηλ. πρέπει όλα τα σημεία στην ίδια κλάση να απέχουν απόσταση το πολύ B μεταξύ τους);

Συντομότερο Μονοπάτι με Περιορισμούς (Constraint Shortest Path)

Είσοδος : Κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο μήκος $w(e) \geq 0$ και ακέραιο κόστος $c(e) \geq 0$, δύο κορυφές s, t και δύο ακέραιοι $W, C \geq 0$.

Ερώτηση : Υπάρχει $s - t$ μονοπάτι στο G με συνολικό μήκος μικρότερο ή ίσο του W και συνολικό κόστος μικρότερο ή ίσο του C.