Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης
2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 24/1/2014

Άσκηση 1: Δρομολόγηση Μαθημάτων

(α) Σε ένα Πανεπιστημιακό Τμήμα, δημιουργήθηκαν πρόσφατα $k \geq 2$ υπερσύγχρονες αίθουσες διδασκαλίας και έχουν υποβληθεί n αιτήματα για διδασκαλία μαθημάτων σε αυτές. Κάθε αίτημα i χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα $[s_i, f_i)$ στο οποίο θα διδαχθεί το μάθημα. Η Γραμματεία πρέπει να επιλέξει τα μαθήματα που θα διδαχθούν στις νέες αίθουσες, καθώς και σε ποια αίθουσα θα διδαχθεί το καθένα, ώστε να μην υπάρχει χρονική επικάλυψη μεταξύ των μαθημάτων που διδάσκονται στην ίδια αίθουσα. Το ζητούμενο είναι να μεγιστοποιηθεί το πλήθος των μαθημάτων που θα διδαχθεί στις νέες αίθουσες. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

(β) Έστω ότι κάθε αίτημα διδασκαλίας χαρακτηρίζεται από το χρονικό διάστημα διδασκαλίας $[s_i, f_i)$ και από τις διδακτικές μονάδες w_i του μαθήματος. Το ζητούμενο είναι να επιλέξουμε, και να δρομολογήσουμε στις αίθουσες χωρίς επικαλύψεις, ένα σύνολο μαθημάτων με μέγιστο άθροισμα διδακτικών μονάδων. Εγγυάται ο αλγόριθμος του (α) τον υπολογισμό μιας βέλτιστης λύσης; Αν όχι, να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος, και να αιτιολογήσετε την ορθότητα και την υπολογιστική του πολυπλοκότητα.

Άσκηση 2: Ταίριασμα Καρτών

Σε ένα παιδικό παιχνίδι με κάρτες, ο παίκτης A παίρνει n "θετικές" κάρτες και ο παίκτης B παίρνει n "ουδέτερες" κάρτες. Κάθε "θετική" κάρτα i έχει βαρύτητα $a_i \geq 0$ και αξία $v_i \geq 0$, και κάθε "ουδέτερη" κάρτα j έχει βαρύτητα $b_j \geq 0$. Ο A γνωρίζει τις κάρτες του και τις κάρτες του B, και πρέπει να υπολογίσει μια (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία των καρτών ώστε να μεγιστοποιήσει την αξία των "θετικών" καρτών που κερδίζει. Αν μια "θετική" κάρτα i του A αντιστοιχιστεί σε μια "ουδέτερη" κάρτα j του B, ο A κερδίζει τη "θετική" κάρτα αν $a_i > b_j$, και τη χάνει διαφορετικά. Να διατυπώσετε έναν αποδοτικό αλγόριθμο που υπολογίζει μια βέλτιστη αντιστοιχία καρτών για τον παίκτη A. Να αιτιολογήσετε αναλυτικά την ορθότητα και την υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας.

Άσκηση 3: Ανεξάρτητο Σύνολο Μέγιστου Βάρους σε Δέντρο

Ένα σύνολο κορυφών $I \subseteq V$ ενός (μη κατευθυνόμενου) γραφήματος $G(V, E)$ είναι *ανεξάρτητο* (independent) αν δεν υπάρχει καμία ακμή μεταξύ κορυφών του I. Σε αυτή την άσκηση, θεωρούμε ένα δέντρο $T(V, E)$ με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή $v \in V$ έχει βάρος $w(v) \geq 0$, και θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο του T με μέγιστο συνολικό βάρος.

(α) Θεωρούμε τον άπληστο αλγόριθμο που διαμερίζει τις κορυφές του T σε δύο ανεξάρτητα σύνολα I_0 και I_1 (εξηγήστε πώς μπορεί να γίνει αυτό σε γραμμικό χρόνο), και επιστρέφει το σύνολο (από τα I_0 και I_1) με το μεγαλύτερο συνολικό βάρος. Να βρείτε ένα παράδειγμα όπου ο άπληστος αλγόριθμος αποτυγχάνει να υπολογίσει τη βέλτιστη λύση. Παρόλα αυτά, η λύση που υπολογίζει ο άπληστος αλγόριθμος εγγυάται ένα σημαντικό ποσοστό του βέλτιστου συνολικού βάρους ενός ανεξάρτητου συνόλου του T. Ποιο είναι αυτό το ποσοστό και γιατί;

(β) Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού ο οποίος έχει χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n)$ και εγγυάται τον υπολογισμό ενός ανεξάρτητου συνόλου του T με μέγιστο συνολικό βάρος.

Άσκηση 4: Δείκτης Ισχύος Banzhaf

Το κοινοβούλιο της χώρας των Αλγορίθμων εργάζεται για την αναθεώρηση του Συντάγματος. Η κατανομή των εδρών στα n κόμματα είναι $w_1, w_2, \ldots, w_n$, και για να εγκριθεί η αναθεώρηση ενός άρθρου χρειάζονται τουλάχιστον Q θετικές ψήφοι. Ο Πρόεδρος της χώρας επιθυμεί να υπολογίσει την επίδραση κάθε κόμματος σε αυτή την διαδικασία με βάση τον δείκτη ισχύος Banzhaf (δείτε π.χ. `http://en.wikipedia.org/wiki/Banzhaf_power_index`). Ο δείκτης ισχύος Banzhaf για το κόμμα i είναι ανάλογος του πλήθους των συνασπισμών κομμάτων στους οποίους μετέχει το κόμμα i και συγκεντρώνουν τουλάχιστον Q έδρες, αλλά αν το κόμμα i αποσκιρτήσει, οι έδρες γίνονται λιγότερες από Q. Πιο συγκεκριμένα, έστω $N = \{1, \ldots, n\}$ το σύνολο των κομμάτων, έστω $w(S) = \sum_{j \in S} w_j$ το σύνολο των εδρών ενός συνασπισμού $S \subseteq N$, και έστω

$$b_i = |\{S \subseteq N : i \in S \wedge w(S) \geq Q \wedge w(S \setminus \{i\}) < Q\}|$$

το πλήθος των συνασπισμών όπου η συμμετοχή του κόμματος i είναι κρίσιμη για τη συγκέντρωση Q εδρών. Ο δείκτης ισχύος Banzhaf για το κόμμα i είναι

$$B_i = \frac{b_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}\,.$$

Να διατυπώσετε αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα $\mathrm{O}(n^2 Q)$ για τον υπολογισμό του δείκτη ισχύος Banzhaf για όλα τα κόμματα. *Σημείωση:* Η χρονική πολυπλοκότητα μπορεί να μειωθεί σε $\mathrm{O}(nQ)$, αλλά χρειάζεται μια επιπλέον ιδέα και Γεννήτριες Συναρτήσεις, και είναι αρκετά δυσκολότερο.

Άσκηση 5: Διαδοχικές Επιτυχίες

Ένα τηλεπαιχνίδι γνώσεων έχει n διαφορετικές κατηγορίες ερωτήσεων, και κάθε παίκτης καλείται να απαντήσει σε μια τυχαία επιλεγμένη ερώτηση από κάθε κατηγορία (κάθε παίκτης απαντά σε n ερωτήσεις συνολικά, η σειρά των κατηγοριών είναι γνωστή εκ των προτέρων). Το παιχνίδι έχει σχεδιαστεί ώστε να ανταμείβονται οι παίκτες που δίνουν πολλές διαδοχικές σωστές απαντήσεις. Έτσι για κάθε μεγιστική ακολουθία από k διαδοχικές σωστές απαντήσεις, ο παίκτης έχει κέρδος k^4 ευρώ. Θέλετε να αποφασίσετε αν αξίζει τον κόπο να λάβετε μέρος στο τηλεπαιχνίδι. Για κάθε κατηγορία ερωτήσεων i, έχετε υπολογίσει την πιθανότητα p_i να απαντήσετε σωστά μια τυχαία ερώτηση αυτής της κατηγορίας. Με βάση αυτές τις πιθανότητες, θέλετε να υπολογίσετε το αναμενόμενο κέρδος από τη συμμετοχή σας. Να διατυπώσετε έναν αλγόριθμο με χρονική πολυπλοκότητα $O(n^2)$ για τον υπολογισμό του αναμενόμενου κέρδους.

Παραδείγματα: Αν έχουμε $n = 3$ κατηγορίες ερωτήσεων και πιθανότητα επιτυχίας $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$, το αναμενόμενο κέρδος είναι $\left(3^4 + 2 \cdot 2^4 + 2 + 3 \cdot 1\right)/8 = 118/8 = 14.75$. Αν έχουμε $n = 4$ κατηγορίες και πιθανότητα επιτυχίας $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.6$, και $p_3 = p_4 = 1/2$, το αναμενόμενο κέρδος είναι 49.52.