# Βασικές Έννοιες Θεωρίας Γραφημάτων

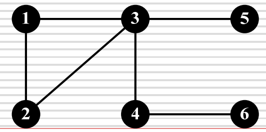
Διδάσκοντες: **Σ. Ζάχος, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

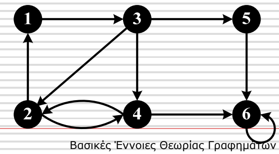
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

## Γραφήματα

- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση – ανάθεση πόρων, layouts, …).
- Γράφημα G(V, E): V κορυφές
  E ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
  - Τάξη |V| = n και μέγεθος |E| = m.
  - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα, απλά μη-κατευθ.
  - Βάρη (μήκη) στις ακμές $G(V,E,w)$ , $w : E \mapsto \mathbb{R}$

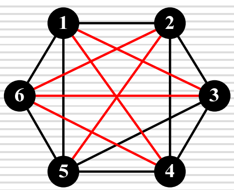


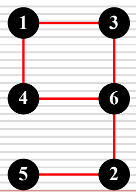






## Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα n κορυφών: $K_n$
  - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή: n(n-1)/2 ακμές.
- Συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ γραφήματος G.
  - Ίδιο σύνολο κορυφών. Ακμές: όσες δεν υπάρχουν στο G.
  - Συμπληρωματικό $\overline{G}$ : αρχικό γράφημα G.

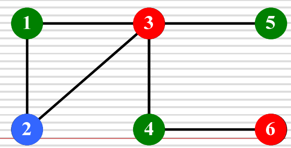




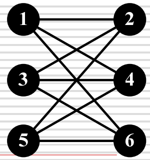

## Σύνολο Ανεξαρτησίας και Χρωματικός Αριθμός

- Σύνολο ανεξαρτησίας: σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- k-μερές γράφημα: κορυφές του διαμερίζονται σε k σύνολα ανεξαρτησίας.
  - Ενδιαφέρει ελάχιστο k για το οποίο γράφημα G είναι k-μερές.
  - Αυτό ταυτίζεται με χρωματικό αριθμό χ(G) γραφήματος G.
- **Χρωματικός αριθμός**: ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
  - Κορυφές ίδιου χρώματος: σύνολο ανεξαρτησίας.
  - Αν G περιέχει $K_m$, $\chi(G) \geq m$
  - $\chi(G) \leq \Delta+1$



# Διμερές Γράφημα

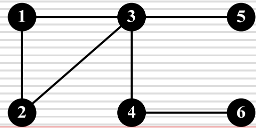
- Υπάρχει διαμέριση κορυφών σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας.
  - G(X, Y, E): X και Y σύνολα ανεξαρτησίας, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y.
  - G διμερές ανν $\chi(G) = 2$.
  - G διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Κύκλος n κορυφών $C_n$: διμερές αν n άρτιος,<br>3-μερές αν n περιττός.
- Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$:
  - Δύο σύνολα ανεξαρτησίας με n και m κορυφές.
  - Όλες οι n·m ακμές μεταξύ τους.
  - Π.χ. $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.

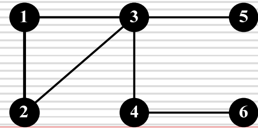





# Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα G′(V′, E′) του G(V, E) όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.
  - Επικαλύπτον (spanning) όταν V′ = V, δηλ. έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος, επιλέγουμε τις **ακμές** που τις συνδέουν.
  - Επαγόμενο (induced) όταν $E' = \{(u,v) \in E : u,v \in V'\}$ δηλ. έχει όλες τις ακμές του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων **κορυφών**.

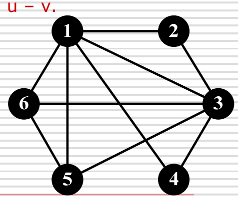





# Διαδρομές, Μονοπάτια, και Κύκλοι

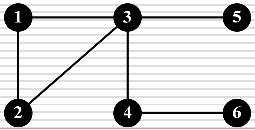
- Διαδρομή – Μονοκονδυλιά – Μονοπάτι - Κ
  - Διαδρομή: ακολουθία «διαδοχικών» ακμών.
    - Δύο ακμές «διαδοχικές» αν έχουν τουλάχιστον ένα άκρο κοινό.
    - Π.χ. {2, 1}, {1, 3}, {3, 4}, {4, 1}, {1, 5}, {5, 3}, {3, 6}.
  - Μονοκονδυλιά: διαδρομή χωρίς επανάληψη ακμών.
  - (Απλό) μονοπάτι: διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών (και ακμών).
  - Υπάρχει διαδρομή u – v ανν υπάρχει μονοπάτι u – v.
  - Απόσταση d(u, v) (χωρίς και με βάρη): μήκος συντομότερου u – v μονοπατιού.
  - Κλειστή διαδρομή όταν άκρα της ταυτίζονται.
  - Κλειστή μονοκονδυλιά ή κύκλωμα.
  - (Απλός) κύκλος: μονοπάτι που άκρα του ταυτίζονται («κλειστό» μονοπάτι).

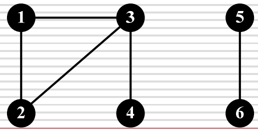





# Συνεκτικότητα

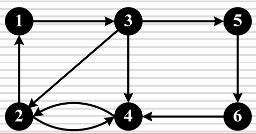
- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα G(V, E) **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$, υπάρχει u – v μονοπάτι.
  - Μη-συνεκτικό γράφημα αποτελείται από συνεκτικές συνιστώσες: μεγιστοτικά συνεκτικά υπογραφήματα.
  - Γέφυρα (ακμή τομής): ακμή που αν αφαιρεθεί αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.
    - Ακμή γέφυρα ανν δεν ανήκει σε κύκλο.
  - Σημείο άρθρωσης (κορυφή τομής): κορυφή που αν αφαιρεθεί αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.

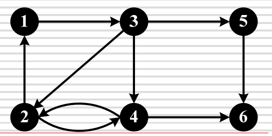


# Συνεκτικότητα

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα G(V, E) **ισχυρά συνεκτικό** αν $\forall u, v \in V$, υπάρχουν u – v και v – u μονοπάτια.
  - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κύκλος που τις περιλαμβάνει.
  - Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες:
    - Μεγιστοτικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.

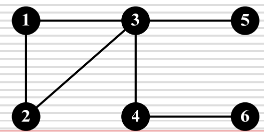


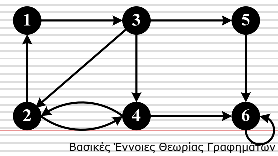






# Βαθμός Κορυφής

- Βαθμός κορυφής deg(v): #ακμών εφαπτόμενων στη v.
  - Κατευθυνόμενα: προς-τα-έσω και προς-τα-έξω βαθμός.
  - Μη-κατευθυνόμενο G(V, E): $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\,|E|$
  - Άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.






# Κύκλος Euler

- Κλειστή μονοκονδυλιά που διέρχεται:
  - από κάθε ακμή 1 φορά, και
  - από κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

1736

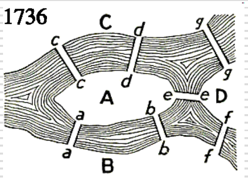
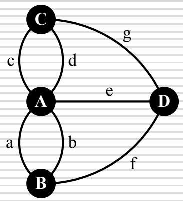
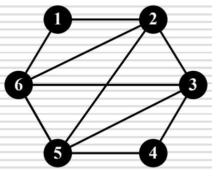



FIGURE 98. *Geographic Map: The Königsberg Bridges.*



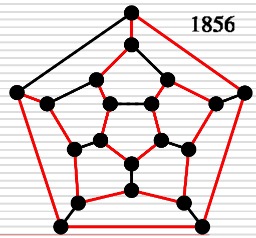






# Κύκλος Hamilton

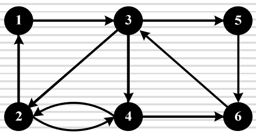
- (Απλός) κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές.
  - Διέρχεται από κάθε κορυφή 1 φορά.
  - Μπορεί να μην διέρχεται από κάποιες ακμές.
- Δεν είναι γνωστή ικανή και αναγκαία συνθήκη!
- Ικανές συνθήκες ώστε G(V, E) έχει κύκλο Hamilton:
  - $\forall v \in V$, $\deg(v) \geq |V|/2$ (Θ. Dirac).
  - $\forall u, v \in V$, $\deg(u) + \deg(v) \geq |V|$ (Θ. Ore).
- Αναγκαίες συνθήκες για ύπαρξη κύκλου Hamilton σε γράφημα G:
  - G δεν έχει γέφυρα ή σημείο άρθρωσης.

1856



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

- … με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - (Απλό) μη κατευθυνόμενο: συμμετρικός, διαγώνιος 0.
  - Άθροισμα στοιχείων γραμμής (στήλης): βαθμός κορυφής.
  - Χώρος Θ(n²).
  - Άμεσος έλεγχος για ύπαρξη ακμής.




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | [illegible] | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | [illegible] | [illegible] | 0 | 0 |
| 3 | [illegible] | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | [illegible] | [illegible] | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | [illegible] | 0 | 0 | [illegible] |
| 6 | 0 | 0 | [illegible] | [illegible] | 0 | 0 |



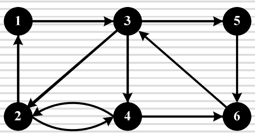
# Πίνακας Γειτνίασης

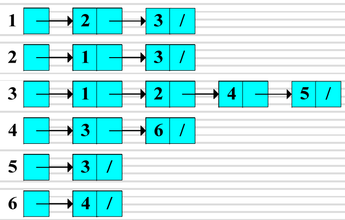
- $A^k[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους k.
  - Διαγώνιος τετραγώνου: $A^2[u_i, u_i]$ = βαθμός($u_i$).
  - $A^3[u_i, u_i] = 2 \times$ #τριγώνων που συμμετέχει $u_i$.
- Ορίζουμε: $Y = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$
- $Y[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους $\leq n - 1$.
  - Μονοπάτια έχουν μήκος ≤ n − 1, και διαδρομή ανν μονοπάτι.
  - Γράφημα συνεκτικό ανν όλα τα στοιχεία του Y θετικά (> 0).



# Αναπαράσταση Γραφημάτων

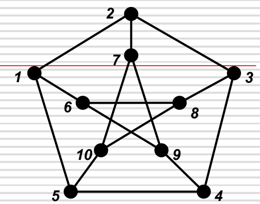
- … με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους.
  - Χώρος Θ(m).
  - Έλεγχος για ύπαρξη ακμής σε χρόνο O(deg(u)).






# Πίνακας Πρόσπτωσης




$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

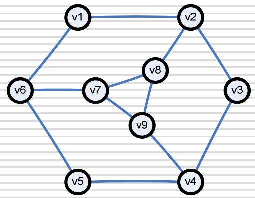
| | 1,2 | 1,5 | 1,6 | 2,3 | 2,7 | 3,4 | 3,8 | 4,5 | 4,9 | 5, 10 | 6,8 | 6,9 | 7,9 | 7, 10 | 8, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

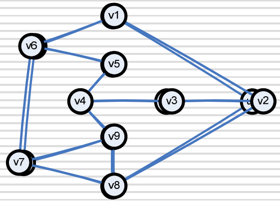
## Ισομορφικά Γραφήματα

- Γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι **ισομορφικά** ανν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f: V_G \to V_H$ (ισομορφισμός) ώστε για κάθε $u, v \in V_G$, $\{u, v\} \in E_G$ ανν $\{f(u), f(v)\} \in E_H$
  - Υπάρχει αντιστοιχία κορυφών που διατηρεί τη γειτονικότητα.
  - Ισομορφισμός αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
- Αναλλοίωτη ιδιότητα: ισομορφικά γραφήματα «συμφωνούν».
  - Όλες οι σημαντικές ιδιότητες: #κορυφών, #ακμών, βαθμοί, συνεκτικότητα, κύκλος Euler και Hamilton, χρωματικός αριθμός, ...
- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα ισομορφικά:
  - Βρίσκω ισομορφισμό και ελέγχω ότι διατηρεί γειτονικότητα.
  - Αποδεικνύω (με ισομορφισμό) ότι τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά.



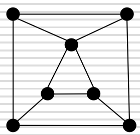
## Ισομορφικά Γραφήματα

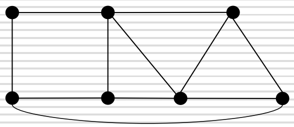


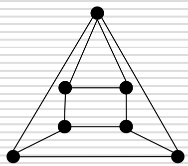






## Ισομορφικά Γραφήματα







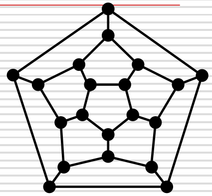


## Ισομορφικά Γραφήματα

- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
  - Βρίσκω μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία «διαφωνούν».
- Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα: ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
  - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει $n(n-1)/4$ ακμές.
  - Αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα υπάρχουν μόνο αν $n$ ή $n-1$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

# Επίπεδα Γραφήματα

- **Επίπεδο** ένα γράφημα που **μπορεί** να ζωγραφιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Θεώρημα 4 χρωμάτων:
  - Επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό $\leq 4$.
- Επίπεδη αποτύπωση ορίζει **όψεις** (faces).
  - Περιοχή επιπέδου που ορίζεται από (απλό) κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις.
  - **Εσωτερικές** και **εξωτερική** όψη.
  - f = #όψεων επιπέδου γραφήματος.
- Τύπος του Euler για συνεκτικά επίπεδα γραφ.: $n + f = m + 2$
  - #όψεων είναι αναλλοίωτη ιδιότητα, δεν εξαρτάται από αποτύπωση!





# Επίπεδα Γραφήματα

- Μέγιστος αριθμός ακμών απλού επίπεδου γραφήματος.
  - Απλό: κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές.
  - Κάθε ακμή «ανήκει» σε μία ή δύο όψεις:
    - Αν ανήκει σε κύκλο: σύνορο δύο όψεων.
    - Διαφορετικά, «ανήκει» σε μία όψη.
  - (Κάθε ακυκλικό γράφημα είναι επίπεδο με μία όψη, την εξωτερική).

$$3f \leq \sum_{f \in \text{όψεις}} \#\text{ακμών}(f) \leq 2m \Rightarrow f \leq 2m/3$$

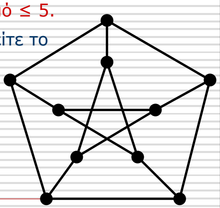
$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3 \Rightarrow m/3 \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

  - Υπάρχει συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με $m = 3n - 6$.
    - Όλες του οι όψεις είναι τρίγωνα.
- Απλό **διμερές** επίπεδο γράφημα: $m \leq 2n - 4$.



# Επίπεδα Γραφήματα

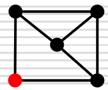
- Άρα αν απλό γράφημα έχει $m > 3n-6$ ($m > 2n-4$ αν διμερές), **δεν** είναι επίπεδο.
  - Τα $K_5$ και $K_{3,3}$ **δεν** είναι επίπεδα.
  - Το συμπληρωματικό του γραφ. Petersen δεν είναι επίπεδο.
  - Απλό επίπεδο γράφημα περιέχει κορυφή βαθμού 5.
    - Π.χ. χρησιμοποιείται για να δείξουμε επαγωγικά ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό $\leq 5$.
  - Κάθε γράφημα G με $n \geq 11$ κορυφές, είτε το G είτε το συμπληρωματικό του δεν είναι επίπεδο.

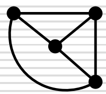




# Ομοιομορφικά Γραφήματα

- **Απλοποίηση σειράς**: απαλοιφή κορυφών βαθμού 2 (δεν επηρεάζουν επιπεδότητα).

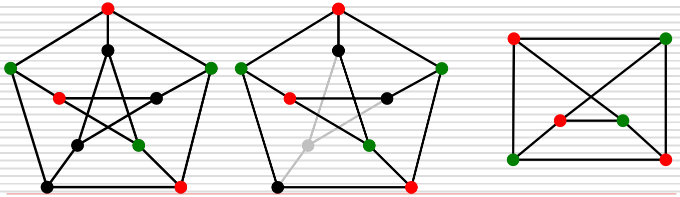




- Γραφήματα G και H ομοιομορφικά ανν μπορούν να καταλήξουν ισομορφικά με διαδοχική εφαρμογή αποποιήσεων σειράς.
  - Ομοιομορφικά μπορούν να «διαφωνούν» σε αναλλοίωτες ιδιότητες, αλλά «συμφωνούν» σε επιπεδότητα.
  - Ομοιομορφικά «συμφωνούν» σε κύκλο Euler και κύκλο Hamilton;

# Θεώρημα Kuratowski

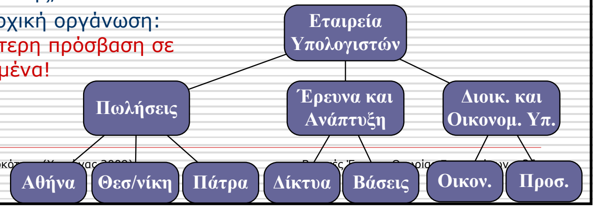
- **Θ. Kuratowski**: Γράφημα επίπεδο ανν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με $K_5$ ή $K_{3,3}$.
  - Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο ανν μπορούμε με απλοποιήσεις (διαγραφές κορυφών και ακμών, απλοποιήσεις σειράς) να καταλήξουμε σε $K_5$ ή $K_{3,3}$.





# Δέντρα

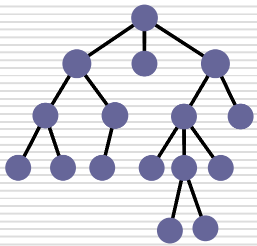
- **Δέντρο:** μοντέλο ιεραρχικής δομής.
  - Αναπαράσταση (ιεραρχικών) σχέσεων: προγόνου-απογόνου, προϊσταμένου-υφισταμένου, όλου-μέρους, …
- Εφαρμογές:
  - Γενεαλογικά δέντρα.
  - Οργανόγραμμα επιχείρησης, ιεραρχία διοίκησης.
  - User interfaces, web sites, module hierarchy, δέντρα απόφασης, …
  - Ιεραρχική οργάνωση: ταχύτερη πρόσβαση σε δεδομένα!






# Δέντρα: Βασικές Ιδιότητες

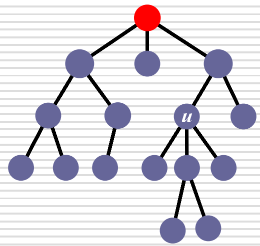
- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό.**
- Τα παρακάτω είναι **ισοδύναμα** για κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E):
  - G είναι δέντρο.
  - Κάθε ζευγάρι κορυφών του G συνδέεται με μοναδικό μονοπάτι.
  - G ελαχιστοτικά συνεκτικό.
  - G συνεκτικό και |E| = |V|-1.
  - G ακυκλικό και |E| = |V|-1.
  - G μεγιστοτικά ακυκλικό.





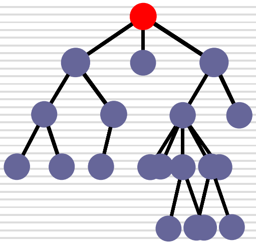
# Δέντρα: Ορολογία

- Γράφημα **ακυκλικό** και **συνεκτικό.**
- Δέντρο με **n κορυφές** έχει **m = n – 1 ακμές.**
- **Ρίζα** : κόμβος χωρίς πρόγονο.
  - Δέντρο με **ρίζα** : **ιεραρχία**
- **Φύλλο** : κόμβος χωρίς απογόνους.
- **Πρόγονοι u**: κόμβοι στο (μοναδικό) μονοπάτι *u* προς ρίζα.
- **Απόγονοι u**: κόμβοι σε μονοπάτια από *u* προς φύλλα.
- **Υποδέντρο u** : Δέντρο αποτελούμενο από *u* και απόγονούς του.



# Δέντρα: Ορολογία

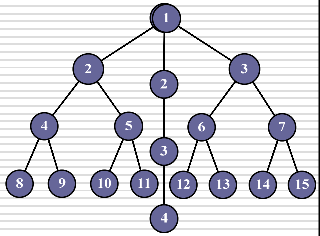
- **Επίπεδο u** : μήκος μονοπατιού από *u* προς ρίζα.
- **Ύψος** : μέγιστο επίπεδο κόμβου (φύλλου).
  - Μέγιστη απόσταση από ρίζα.
- **Βαθμός u**: αριθμός παιδιών u.
- **Δυαδικό δέντρο** :
  κάθε κορυφή ≤ **2 παιδιά**
  - Αριστερό και δεξιό.
- Κάθε **υποδέντρο** είναι δυαδικό δέντρο.





# Δυαδικά Δέντρα

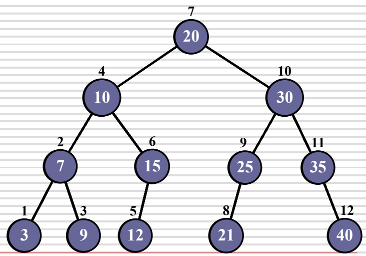
- **Ύψος *h*** :
  $h+1 \leq$ #κορυφών $\leq 2^{h+1} - 1$
  - $h+1$ επίπεδα, ≥ 1 κορ. / επίπ.
  - $\leq 2^i$ κορυφές στο επίπεδο *i* .
    $1 + 2 + \ldots + 2^h = 2^{h+1} - 1$
- **#κορυφών n** :
  $\log_2(n+1) - 1 \leq h \leq n - 1$
- **Πλήρες** (complete) : $n = 2^{h+1} - 1$






# Inorder

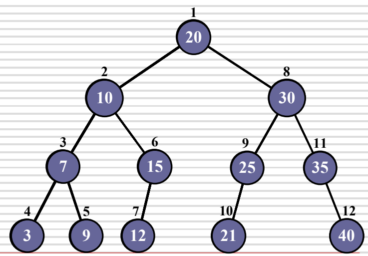
- Ενδο-διατεταγμένη (inorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Ρίζα – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται μετά από κόμβους αριστερού υποδέντρου και πριν από κόμβους δεξιού υποδέντρου.






# Preorder

- Προ-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Ρίζα – Αριστερό – Δεξί.
  - Κόμβος εξετάζεται πριν από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.



# Postorder

- Μετα-διατεταγμένη (preorder) διέλευση:
  - Αριστερό – Δεξί – Ρίζα
  - Κόμβος εξετάζεται μετά από κόμβους αριστερού και δεξιού υποδέντρου.