

6η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Κάποιος ισχυρίζεται ότι παρόλο που ο αλγόριθμος Dijkstra δε δουλεύει για κατευθυνόμενους γράφους με αρνητικά βάρη, μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να δίνει σωστά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα αν v είναι η ακμή με το ελάχιστο βάρος (αρνητικό), προτείνει να προσθέσουμε σε όλες τις ακμές βάρος $-w(v) + 1$ ώστε να αποκτήσουν όλες οι ακμές θετικό βάρος. Στη συνέχεια προτείνει να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Dijkstra ως έχει. Εξηγήστε αν η παραπάνω σκέψη λύνει το single-source πρόβλημα σωστά, δίνοντας απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 2

Στην ώρα της γυμναστικής, η δασκάλα χωρίζει τους μαθητές της σε n αγόρια και m κορίτσια και βάζει τις δύο ομάδες να διαταχθούν σε δύο σειρές κατά ύψος, μία για τα αγόρια και μία για τα κορίτσια. Ποιός είναι ένας αποδοτικός τρόπος για τη δασκάλα να βρει ένα μαθητή της (ή μαθήτριά) που θα είναι κοντύτερος από το πολύ τα μισά παιδιά και ψηλότερος από επίσης το πολύ τα μισά παιδιά, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν δύο παιδιά με το ίδιο ύψος;

Άσκηση 3

Δίνονται τα μη κενά κλειστά διαστήματα υποσύνολα των πραγματικών $[s_1, t_1], [s_2, t_2], \dots, [s_n, t_n]$. Δύο διαστήματα λέγονται φωλιασμένα αν και μόνο αν το ένα είναι υποσύνολο του άλλου. Βρείτε αποδοτικό αλγόριθμο που εξετάζει αν υπάρχουν φωλιασμένα διαστήματα. Ποια είναι η πολυπλοκότητά του;

Άσκηση 4: Πολλαπλασιασμός divide & conquer

1. Δείξτε πώς μπορούν να πολλαπλασιαστούν δύο γραμμικά πολυώνυμα $ax + b$ και $cx + d$ χρησιμοποιώντας μόνο 3 πολλαπλασιασμούς.
2. Δώστε έναν divide & conquer αλγόριθμο για πολλαπλασιασμό πολυωνύμων βαθμού n με πολυπλοκότητα χρόνου $\Theta(n^{\log 3})$.

Υπόδειξη: βρείτε έναν τρόπο να ομαδοποιήσετε τους συντελεστές του πολυ-
νόμου (π.χ. σε υψηλής και χαμηλής τάξης, ή ανάλογα με το αν ο αντίστοιχος
εκθέτης είναι περιττός ή άρτιος) ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η ιδέα του
προηγούμενου ερωτήματος.

3. Δείξτε ότι δύο ακέραιοι των n bit μπορούν να πολλαπλασιαστούν σε
 $O(n^{\log 3})$ βήματα, όπου κάθε βήμα ενεργεί πάνω σε ένα σταθερό πλήθος
από bit.

Να παραδοθούν μέχρι την 19-12-2005