

5η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Αντίστοιχα με το minimum spanning tree, μπορεί να οριστεί και το maximum spanning tree ως το spanning tree με το μέγιστο βάρος. Ο άπληστος αλγόριθμος του Prim τροποποιημένος ώστε να επιλέγει κάθε φορά την ακριβότερη ακμή, λύνει το πρόβλημα της εύρεσης του maximum spanning tree; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

Άσκηση 2

Ένας οδηγός αποφασίζει να κάνει ένα ταξίδι από την πόλη X μέχρι την πόλη Y με το αυτοκίνητό του, το οποίο έχει αυτονομία κίνησης ως προς τη βενζίνη που μπορεί να αποθηκεύσει, k χιλιόμετρα. Αν ο οδηγός διαθέτει χάρτη στον οποίο αναφέρονται όλα τα βενζινάδικα της διαδρομής με τις αποστάσεις τους και επιπλέον επιθυμεί να πραγματοποιήσει όσο το δυνατό λιγότερες στάσεις, πώς πρέπει να προγραμματίσει τον ανεφοδιασμό καυσίμων; Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου που επινοήσατε.

Σημείωση: δεν υπάρχει ζεύγος διαδοχικών βενζινάδικων που να απέχουν μεταξύ τους πάνω από k χιλιόμετρα.

Άσκηση 3

Δίνεται μία ακολουθία από n διακριτούς ακεραίους. Περιγράψτε αλγόριθμο που θα υπολογίζει τη μέγιστη (ως προς το μήκος) αύξουσα υπακολουθία σχολιάζοντας παράλληλα την ορθότητα και την πολυπλοκότητά του. Δώστε τέλος ένα μη τετριμμένο παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου σας για μία ακολουθία από 8 ακεραίους της επιλογής σας.

Άσκηση 4

Έστω $X = (x_1, \dots, x_n)$ μία ακολουθία n θετικών πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των δεικτών $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ ονομάζεται ανεξάρτητο αν $|i - j| > 1$ για κάθε δύο δείκτες $i, j \in I$. Δηλαδή δεν υπάρχει δείκτης $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ τέτοιος ώστε και το k και το $k + 1$ να ανήκουν στο I .

Το βάρος ενός συνόλου $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ είναι το άθροισμα των αντίστοιχων x_i : $W(J) = \sum_{i \in J} x_i$.

Ένα ανεξάρτητο σύνολο I ονομάζεται μέγιστο αν $W(I) \geq W(J)$ για κάθε ανεξάρτητο σύνολο J .

Στόχος είναι να βρούμε ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο για μία δοθείσα ακολουθία X .

1. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο άπληστο αλγόριθμο για το πρόβλημα: αρχικά $I = \emptyset$ και $J = \{1, \dots, n\}$. Όσο το J έχει στοιχεία, μεταφέρουμε το δείκτη $j \in J$ με τη μεγαλύτερη τιμή x_j στο I και αφαιρούμε από το J τους δείκτες $j - 1$, j και $j + 1$. Το αποτέλεσμα είναι το σύνολο I .
 - (a) Βρείτε ένα παράδειγμα μικρής ακολουθίας θετικών αριθμών για το οποίο ο παραπάνω άπληστος αλγόριθμος δεν παράγει τη βέλτιστη λύση.
 - (b) Αποδείξτε ότι αυτός ο άπληστος αλγόριθμος βρίσκει ένα ανεξάρτητο σύνολο I του οποίου το βάρος είναι τουλάχιστον το μισό από το βάρος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου.
2. Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα αυτό ισχύει η αρχή της βελτιστότητας και δώστε μία αναδρομική συνάρτηση που να συνδέει τη βέλτιστη λύση ενός στιγμιότυπου με τη βέλτιστη λύση υποπροβλημάτων του. Δώστε αρχικές τιμές για τη συνάρτηση αυτή.
3. Χρησιμοποιώντας δυναμικό προγραμματισμό, κατασκευάστε έναν αλγόριθμο που να επιλύει το πρόβλημα σε χρόνο $\Theta(n)$.

Να παραδοθούν μέχρι την 12-12-2005