Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα, 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ & ΣΕΜΦΕ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

4η Σειρά ασκήσεων

1. *Τριαδικό* ονομάζεται ένα δένδρο (με ρίζα) όπου κάθε κόμβος έχει το πολύ τρία παιδιά.
   - **a.** Πόσους κόμβους έχει ένα πλήρες τριαδικό δένδρο με n φύλλα;
   - **b.** Πόσα φύλλα έχει ένα πλήρες τριαδικό δένδρο με n κόμβους;
   - **c.** Εξηγήστε πως μπορεί να αποθηκευτεί ένα τριαδικό δένδρο σε ένα μονοδιάστατο array. Δώστε επίσης τις συσχετίσεις των θέσεων κάθε κόμβου με τις θέσεις των παιδιών του καθώς και του γονέα του.
   - **d.** Πως μπορεί να γενικευτεί η ιδέα του σωρού (heap) στα τριαδικά δένδρα; Θεωρείτε μια τέτοια γενίκευση χρήσιμη;

2. Για κάθε ένα από τα επόμενα σύνολα αριθμών, εκτελέστε τα στάδια κατασκευής σωρού για τους δύο αλγορίθμους heap combine και heap insert:
   - **a.** {x, y, z, w, 14, 5, 6, 15, 8, 7, 6, 1, 3}
   - **b.** {x, y, z, w, 6, 5, 10, 2, 8, 12, 16, 9, 17}

   x, y, z, w είναι τα τέσσερα τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Τα στάδια εκτέλεσης πρέπει να φαίνονται μόνο γραφικά.

3. Πόσα βήματα χρειάζεται ο αλγόριθμος heapsort για να ταξινομήσει ένα διάνυσμα με:
   - **a.** ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατά αύξουσα σειρά;
   - **b.** ήδη ταξινομημένα στοιχεία κατα φθίνουσα σειρά;

   Δείξτε ότι στη χειρότερη περίπτωση ο αλγόριθμος heapsort έχει πολυπλοκότητα $\Omega(n \log n)$.

4. Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο, ένας κόμβος με indegree μηδέν λέγεται *πηγή*.
   - **a.** Αποδείξτε ότι σε κάθε ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφο υπάρχει τουλάχιστον μία πηγή.
   - **b.** Δείξτε ότι ένας κατευθυνόμενος γράφος με n κόμβους είναι ακυκλικός αν και μόνο αν μπορούμε να τοποθετήσουμε ετικέτες $1,2,\ldots,n$ στους κόμβους ώστε όλες οι ακμές να κατευθύνονται από κόμβο με μικρότερη ετικέτα σε κόμβο με μεγαλύτερη ετικέτα.
   - **c.** Περιγράψτε πολυωνυμικό αλγόριθμο που να αποφαίνεται αν ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι ακυκλικός.

5. Έστω x το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Θεωρήστε έναν επίπεδο γράφο με $(x+3)^2$ κόμβους και $(x+2)^2$ ακμές που ορίζει στο επίπεδο $2\cdot(2x+1)$ περιοχές.
   - **a.** Υπάρχει γράφος με τα παραπάνω χαρακτηριστικά που να αποτελείται από $2\cdot(4x+1)$ συνεκτικές συνιστώσες;
   - **b.** Υπάρχει γράφος με τα παραπάνω χαρακτηριστικά που να αποτελείται από $2\cdot(4x+3)$ συνεκτικές συνιστώσες;

   Σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχει τέτοιος γράφος ζωγραφίστε τον, αλλιώς αποδείξτε ότι δεν υπάρχει.

6. Ορισμός 1: Έστω n διαφορετικοί μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί $x_1,\ldots,x_n$. Ο αριθμός x_k ($1 \le k \le n$) ονομάζεται *μεσαίος* των $x_1,\ldots,x_n$ αν είναι μεγαλύτερος από ακριβώς $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1$ άλλα στοιχεία x_i.

Ορισμός 2: Έστω n διαφορετικοί μεταξύ τους ακέραιοι αριθμοί $x_1,\ldots,x_n$, με αντίστοιχα θετικά βάρη $w_1,\ldots,w_n$ για τα οποία ισχύει $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Ο αριθμός x_k ($1 \le k \le n$) ονομάζεται *βεβαρημένος μεσαίος* των $x_1,\ldots,x_n$ αν ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής σχέσεις: $\sum_{i:x_i<x_k} w_i < \frac{1}{2}$ και $\sum_{i:x_i>x_k} w_i \le \frac{1}{2}$.

a. Αποδείξτε ότι ο μεσαίος των $x_1,\ldots,x_n$ είναι ο βεβαρημένος μεσαίος των ίδιων αριθμών με βάρη $w_i = \frac{1}{n}$, $1 \le i \le n$.

b. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο που χρησιμοποιεί ταξινόμηση και βρίσκει το βεβαρημένο μεσαίο n αριθμών σε χρόνο $O(n \log n)$ στη χειρότερη περίπτωση. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου που προτείνετε, καθώς και το άνω φράγμα στο χρόνο εκτέλεσής του.

c. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο που βρίσκει το βεβαρημένο μεσαίο n αριθμών σε χρόνο $\Theta(n)$ στη χειρότερη περίπτωση. Θεωρήστε δεδομένο έναν αλγόριθμο που βρίσκει το μεσαίο n αριθμών σε χρόνο $\Theta(n)$ στη χειρότερη περίπτωση. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου που προτείνετε, καθώς και το φράγμα στο χρόνο εκτέλεσής του.

Ορισμός 3: Το *πρόβλημα τοποθέτησης ταχυδρομείων* ορίζεται ως εξής: Δίνονται n σημεία $p_1,\ldots,p_n$ με αντίστοιχα βάρη $w_1,\ldots,w_n$. Θέλουμε να βρούμε ένα σημείο p (όχι απαραίτητα ένα από τα δοσμένα) που ελαχιστοποιεί την παράσταση $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot d(p, p_i)$, όπου $d(p, p_i)$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων p και p_i.

(*) d. Αποδείξτε ότι ο βεβαρημένος μεσαίος είναι μια βέλτιστη λύση για το μονοδιάστατο πρόβλημα τοποθέτησης ταχυδρομείων, όπου τα σημεία είναι πραγματικοί αριθμοί και η απόσταση μεταξύ δύο σημείων a και b ορίζεται ως: $d(a,b) = |a-b|$.

(*) e. Προσπαθήστε να βρείτε τη βέλτιστη λύση για το διδιάστατο πρόβλημα τοποθέτησης ταχυδρομείων, όπου τα σημεία είναι ζεύγη πραγματικών αριθμών και η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $a = (x_1, y_1)$ και $b = (x_2, y_2)$ είναι η απόσταση Manhattan: $d(a,b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Παράδοση έως 28/11/2005