Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα, 7ου εξαμήνου ΣΗΜΜΥ & ΣΕΜΦΕ
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/algorithms/
Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής (Τομέας Computer Science ΣΗΜΜΥ)

3η Σειρά ασκήσεων

1) Υπολογίστε χωρίς χρήση του master theorem τη συνάρτηση $T(n)$ που ορίζεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$T(1) = 7$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{5}\right) + 11n$$

2) Ταξινομήστε τις επόμενες συναρτήσεις κατά σειρά τάξης μεγέθους από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη. Βρείτε δηλαδή διάταξη $g_1, g_2, g_3, \ldots$ τέτοια ώστε $g_1 = \Omega(g_2),\ g_2 = \Omega(g_3), \ldots$.

i) 2^{2^n} ii) $n!$ iii) $n2^n$ iv) $n-7$ v) $n\log n$ vi) $\log^{z-1} n$ vii) $\log(4n^{x+3})$
viii) $n/\log n$ ix) $n^{y+1}/\log^{z+1} n$ x) $(\log n)/n^y$ xi) $3n^{z+2}-7$ xii) e^n

όπου x,y,z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Επισημάνετε τις συναρτήσεις που έχουν ίδια τάξη μεγέθους ($g_i = \Theta(g_j)$).

3) Δίνονται οι θετικές και αύξουσες συναρτήσεις f_1, f_2, g_1, g_2 για τις οποίες ισχύει ότι $(x+1)f_1(n) = O(g_1(n))$ και $f_2(n) = O((y+1)g_2(n))$, όπου x,y είναι τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Εξετάστε αν ισχύει ότι $g_1(n) + g_2(n) = \Omega(f_1(n) + f_2(n))$. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

4) **(*)** Η αναδρομική σχέση $T(n) = 7yT(n/2) + n^{2x}$ περιγράφει την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Α όπου x,y είναι τα δύο τελευταία μη μηδενικά ψηφία του αριθμού μητρώου σας. Ένας αλγόριθμος Α’ για το ίδιο πρόβλημα έχει πολυπλοκότητα $T'(n) = ayT'(n/4) + n^{2x}$. Βρείτε τη μέγιστη τιμή του ακεραίου a, για την οποία ο αλγόριθμος Α’ είναι (ασυμπτωτικά) αποδοτικότερος του Α.

5) Η πολυπλοκότητα τριών αλγορίθμων για το ίδιο πρόβλημα δίνεται από τις επόμενες αναδρομικές σχέσεις:

$$T_1(n) = 5T_1(n/5) + (x+1)n/\log n$$

$$T_2(n) = 2T_2(n/4) + (y+1)n^2\sqrt{n}$$

$$T_3(n) = T_3(n-1) + (z+1)/n$$

όπου x,y,z είναι τα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας αντίστοιχα. Ταξινομήστε τους αλγορίθμους ως προς την αποδοτικότητά τους. Ποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν τη μέθοδο divide & conquer; Εξηγήστε.

6) Σε ένα δένδρο Τ χωρίς προκαθορισμένη ρίζα ένας κόμβος λέγεται 1/*k* separator αν μετά την αφαιρεσή του, οι συνεκτικές συνιστώσες που απομένουν έχουν μέγεθος το πολύ *n*/*k*, όπου *n* ο αριθμός των κόμβων του δένδρου.

a)Δείξτε ότι σε κάθε δένδρο υπάρχει 1/2 separator.

b)Δείξτε ότι αν σε ένα δένδρο υπάρχει 1/*k* separator (υποθέτοντας $k < n$) τότε υπάρχει κόμβος με βαθμό τουλάχιστον *k*. Εξετάστε αν ισχύει και το αντίστροφο.

c)Βρείτε αλγόριθμο που αποφαίνεται αν ένα δένδρο έχει 1/(*x*+3) separator, όπου *x* το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και υπολογίστε την πολυπλοκότητά του.

Παράδοση έως 10/11/2005