

2^η Σειρά ασκήσεων

- 1) Να αποδείξετε την ισοδυναμία των παρακάτω προτάσεων:
 - a. Ο γράφος είναι δένδρο.
 - b. Ο γράφος είναι συνεκτικός με $n-1$ ακμές.
 - c. Ο γράφος έχει $n-1$ ακμές και δεν έχει κύκλους.
 - d. Αφαιρώντας μια οποιαδήποτε ακμή, ο γράφος από συνεκτικός γίνεται μη συνεκτικός.
 - e. Κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με ακριβώς ένα απλό μονοπάτι.
 - f. Ο γράφος δεν έχει κύκλους αλλά η πρόσθεση οποιασδήποτε νέας ακμής δημιουργεί κύκλο.
- 2) Κύβος λέγεται ένα γράφημα με $n = 2^k$ κορυφές, μια για κάθε δυαδικό αριθμό με k bits. Δύο κόμβοι συνδέονται αν οι αντίστοιχοι δυαδικοί αριθμοί διαφέρουν σε ακριβώς ένα bit. Να εξετάσετε αν οι κύβοι είναι διμερείς γράφοι, αιτιολογώντας.
- 3) (*) Ένας διμερής γράφος λέγεται ισορροπημένος αν οι διαμερίσεις είναι ισοπληθείς. Τέλειο ταίριασμα λέγεται το ταίριασμα που συμμετέχουν όλες οι κορυφές. Εξετάστε αν ένας συνεκτικός ισορροπημένος διμερής γράφος έχει τέλειο ταίριασμα. Αιτιολογήστε. Δώστε αποδοτικό αλγόριθμο που να βρίσκει ένα τέλειο ταίριασμα (αν αυτό υπάρχει).
- 4) Δείξτε ότι ένας γράφος περιέχει κλίκα μεγέθους k αν ο συμπληρωματικός του έχει independent set μεγέθους επίσης k .
- 5) Δύο γνωστές αναπαραστάσεις ενός γράφου είναι ο πίνακας γειτνίασης και η λίστα γειτνίασης. Δώστε αποδοτικούς αλγορίθμους που δεδομένης μιας αναπαράστασης παράγεται η άλλη.
- 6) Ολική καταβόθρα σε ένα κατευθυνόμενο γράφο λέγεται μια κορυφή που δεν έχει επόμενες κορυφές και είναι επόμενη κάθε άλλης κορυφής. Για κάθε μια από τις αναπαραστάσεις του γράφου (πίνακα γειτνίασης και λίστα γειτνίασης) επινοήστε αποδοτικό αλγόριθμο που βρίσκει μια ολική καταβόθρα ή αποφαίνεται ότι δεν υπάρχει.

Παράδοση έως 3/11/2005