Εισαγωγή στην Επιστήμη των Υπολογιστών

4ο εξάμηνο Σ.Η.Μ.Μ.Υ. & Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
http://www.corelab.ece.ntua.gr/courses/

2η ενότητα: Γραφήματα και Αλγόριθμοι Γράφων

Στάθης Ζάχος
Άρης Παγουρτζής

Επιμέλεια: Πάνος Χείλαρης, Βαγγέλης Μπαμπάς, Γεωργία Καούρη

Εισαγωγή

- Γράφοι
- Προβλήματα, Αλγόριθμοι, Πολυπλοκότητα
- Συμβολισμοί τάξης μεγέθους
- Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι: κύκλος Euler, διάσχιση γράφων, συντομότερα μονοπάτια, ελάχιστο συνδετικό δένδρο (minimum spanning tree), μέγιστη ροή, ταίριασμα (matching), χρωματισμός ακμών σε διμερείς γράφους.

Γράφοι (ή Γραφήματα)

Ορισμός. *Γράφος (ή γράφημα)* G*, ονομάζεται ένα διατεταγμένο ζεύγος συνόλων* (V, E)*, όπου* V *είναι μη κενό σύνολο στοιχείων και* E *ένα σύνολο μη διατεταγμένων ζευγών του* V*, δηλαδή*

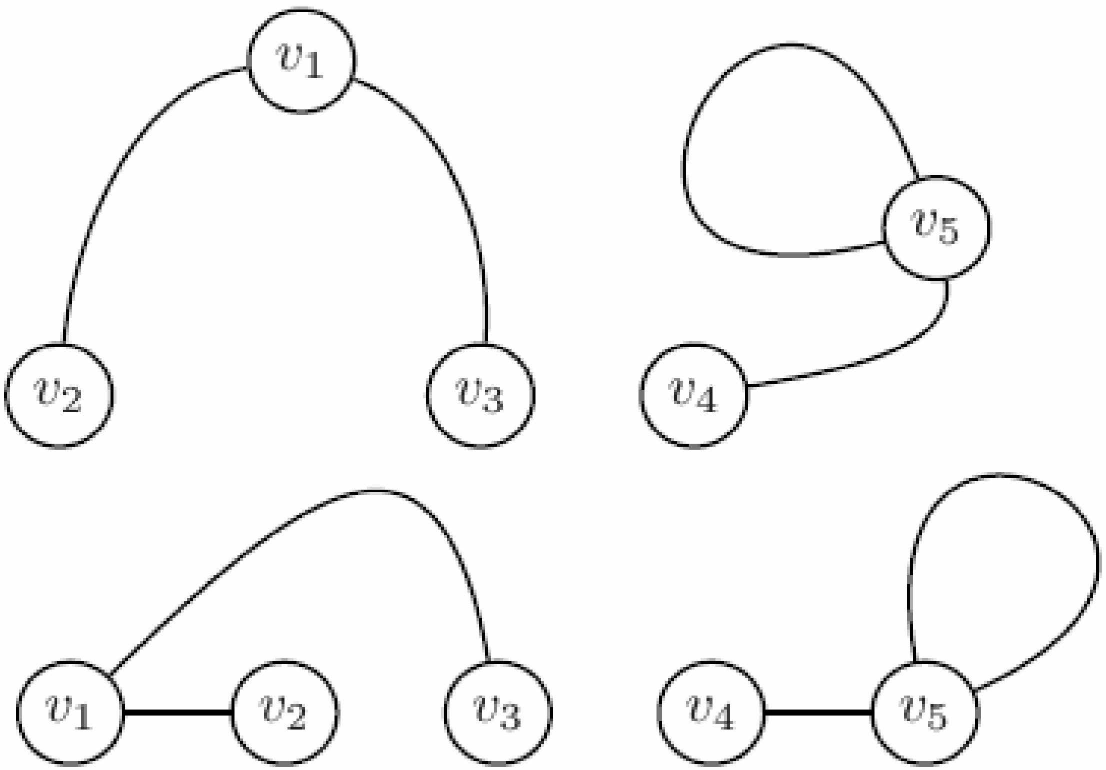
$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

V: κορυφές (vertices) ή κόμβοι (nodes).

E: ακμές ή πλευρές (edges).

Παράδειγμα Γράφου

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_5\}\}$$



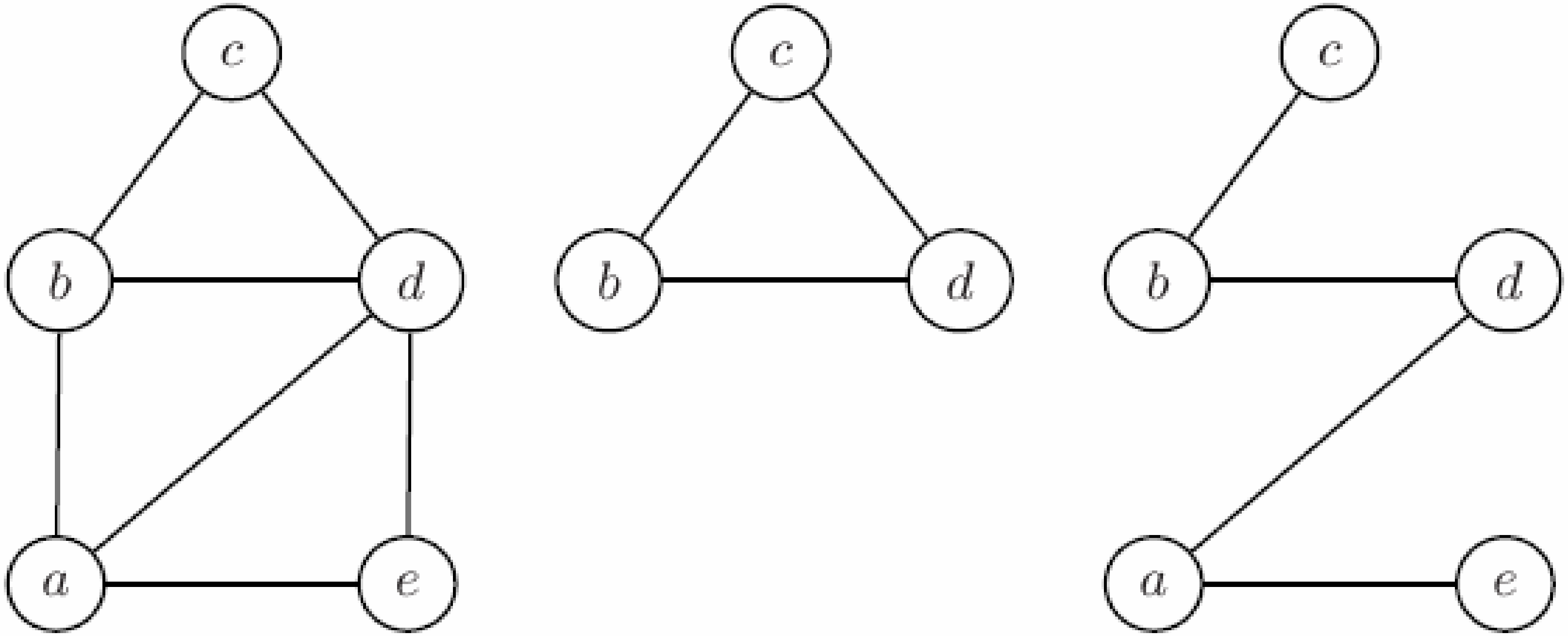
Ορολογία – Συμβολισμοί

Τα στοιχεία του μη κενού συνόλου V λέγονται **κορυφές** ή **κόμβοι** (*vertices, nodes*) του γράφου. Τα στοιχεία του συνόλου E λέγονται **ακμές** ή **πλευρές** (*edges*) και μπορούν να συμβολιστούν και με ένα γράμμα, π.χ. e, όπου $e = \{x, y\}, x, y \in V, x \neq y$. Καμιά φορά, καταχρηστικώς, θεωρούμε και ακμές-βρόχους, δηλαδή $e = \{x, x\}$.

Αν $e = \{v_1, v_2\}$ είναι ακμή ενός γράφου G, αυτή ενώνει ή συνδέει τις κορυφές v_1, v_2 του G και μπορεί να συμβολιστεί επίσης ως v_1v_2 ή v_2v_1. Οι κορυφές v_1, v_2 λέγονται **άκρα** (*endpoints*) της ακμής e. Επειδή δε η ακμή e τις συνδέει, λέγονται **γειτονικές** (*adjacent*) κορυφές στο G.

Αν τώρα v_1, v_2 είναι γειτονικές κορυφές στο G, τότε η ακμή v_1v_2 προσπίπτει (*incident*) στις v_1 και v_2. Δύο ακμές που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή είναι **γειτονικές** ακμές στο G.

Υπογράφοι



Ορισμός 3.1.7. Ένας γράφος $G' = (V', E')$ είναι **υπογράφος** (*subgraph*) ενός άλλου γράφου $G = (V, E)$, αν ισχύει $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

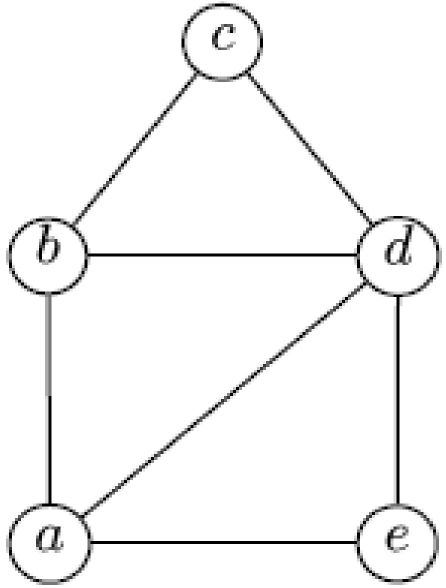
Δρόμος σε γράφο

Ορισμός 3.1.13. Σε ένα γράφο G, μια πεπερασμένη ακολουθία εναλλάξ κορυφών και ακμών του G που αρχίζει και τελειώνει σε κορυφή και που κάθε ακμή που περιέχεται στην ακολουθία προσπίπτει στην κορυφή που προηγείται και σε αυτήν που έπεται, λέγεται **δρόμος ή διαδρομή** (*walk*) στο G.

Παράδειγμα 3.1.14. Στο γράφο G στο σχήμα 3.3 η ακολουθία κορυφών και ακμών του γράφου

$$c\{c,d\}d\{d,b\}b\{b,a\}a\{a,d\}d\{d,b\}b$$

είναι δρόμος στο G.



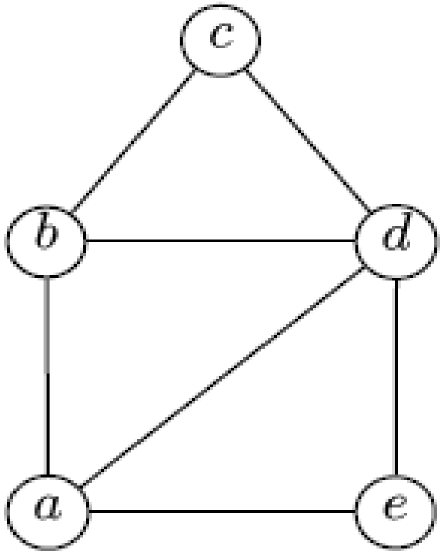
Μονοπάτι

Ορισμός 3.1.17. Ένας δρόμος στον οποίο κάθε κορυφή και κάθε ακμή του εμφανίζονται ακριβώς μία φορά, λέγεται **απλό μονοπάτι** (*path*).

Παράδειγμα 3.1.18. Στο γράφο G στο σχήμα 3.3 ο δρόμος

$$a\{a,b\}b\{b,c\}c\{c,d\}d\{d,e\}e$$

είναι απλό μονοπάτι.



Δρόμοι, μονοπάτια, κύκλοι

Δρόμος (walk): έγκυρη ακολουθία κορυφών-ακμών.

Μονοπάτι (path): δρόμος χωρίς επαναλήψεις ακμών.

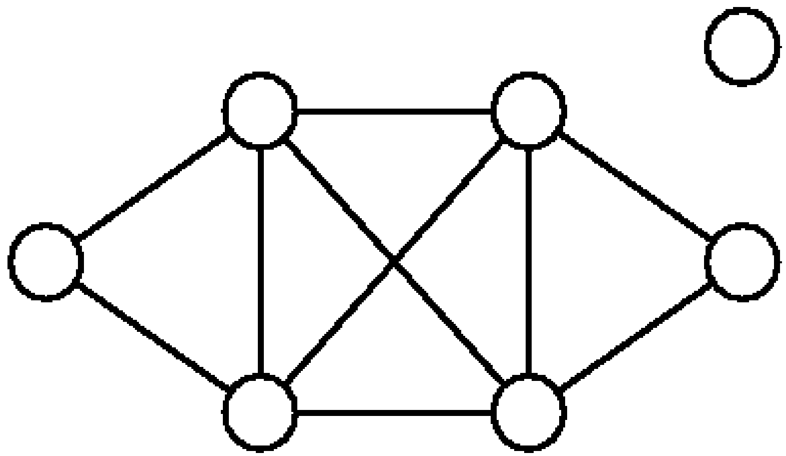
Απλό μονοπάτι (simple path): μονοπάτι χωρίς επαναλήψεις κορυφών.

Κύκλος (cycle): κλειστό μονοπάτι. Απλός κύκλος: κλειστό απλό μονοπάτι.

Μήκος δρόμου: το πλήθος των ακμών του.

Γράφος Euler

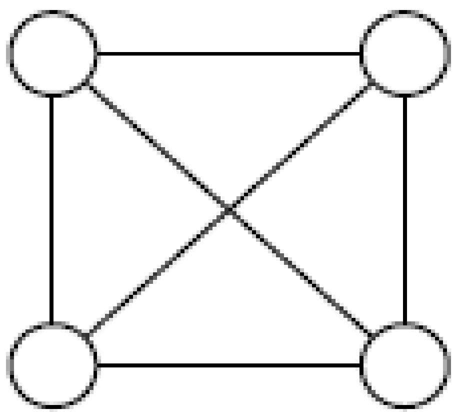
Ορισμός 3.1.22. Ένας κύκλος που περνά ακριβώς μια φορά από κάθε ακμή ενός γράφου G (χωρίς απαραίτητα να περνά ακριβώς μια φορά και από κάθε κορυφή) ονομάζεται **κύκλος Euler**. Ένας γράφος που έχει κύκλο Euler ονομάζεται **γράφος Euler**. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ένας γράφος έχει κύκλο Euler ανν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό (σχήμα 3.5(α)).



Σχήμα 3.5 (α)

Γράφος Hamilton

Ορισμός 3.1.23. Ένας κύκλος που περνά ακριβώς μια φορά από κάθε κορυφή ενός γράφου G (χωρίς απαραίτητα να περνά και από όλες τις ακμές) ονομάζεται **κύκλος Hamilton**. Ένας γράφος που έχει κύκλο Hamilton ονομάζεται **γράφος Hamilton** (σχήμα 3.5(β)).



Σχήμα 3.5 (β)

Παράσταση Γράφου

Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix)

Πίνακας πρόσπτωσης (incidence matrix)

Λίστες γειτνίασης (adjacency lists): αποδοτική παράσταση σε αραιούς γράφους.

Πίνακας Γειτνίασης

Ορισμός 5.2.25 (Πίνακας γειτνίασης). Έστω ένας γράφος $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Τότε ο γράφος μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός $n \times n$ πίνακα $A(G)$, όπου

$$A(G) = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ο πίνακας $A(G)$ λέγεται **πίνακας γειτνίασης** (*adjacency matrix*), και είναι συμμετρικός ($a_{i,j} = a_{j,i}$).

Πίνακας Πρόσπτωσης

Ορισμός 3.1.26. Έστω ένας γράφος $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ και $E = \{l_1, l_2, ..., l_m\}$. Τότε ο γράφος μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ενός $n \times m$ πίνακα $B(G)$, που ονομάζεται **πίνακας πρόσπτωσης** (*incidence matrix*), όπου

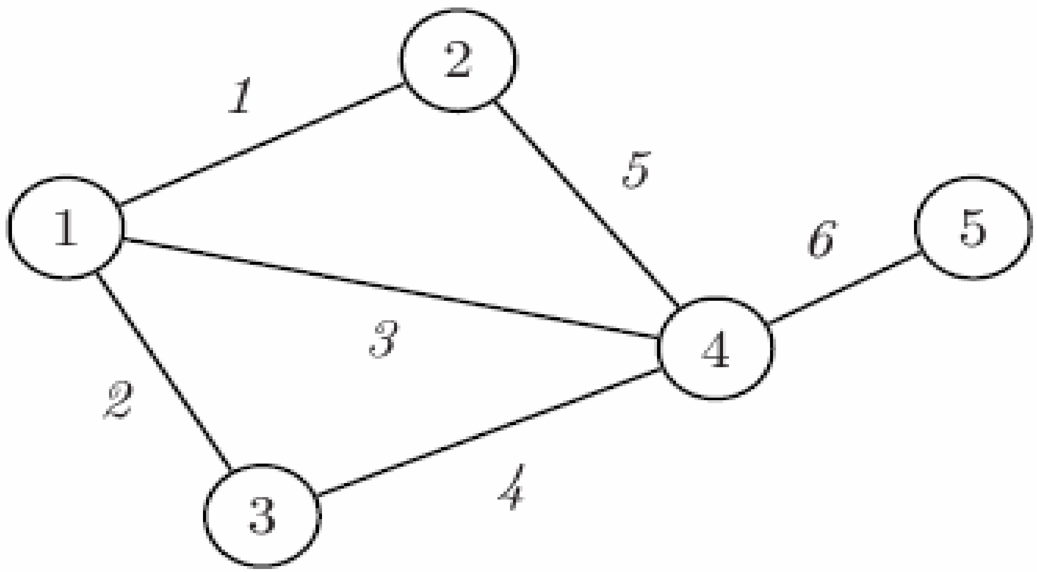
$$B(G) = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } l_j \text{ προσπίπτει στο } v_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$B(G)B(G)^T = A(G) + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

όπου d_i είναι ο βαθμός του κόμβου i.

Παράσταση με λίστες γειτνίασης



$[1] \rightarrow \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$[2] \rightarrow \quad 1 \quad 4$

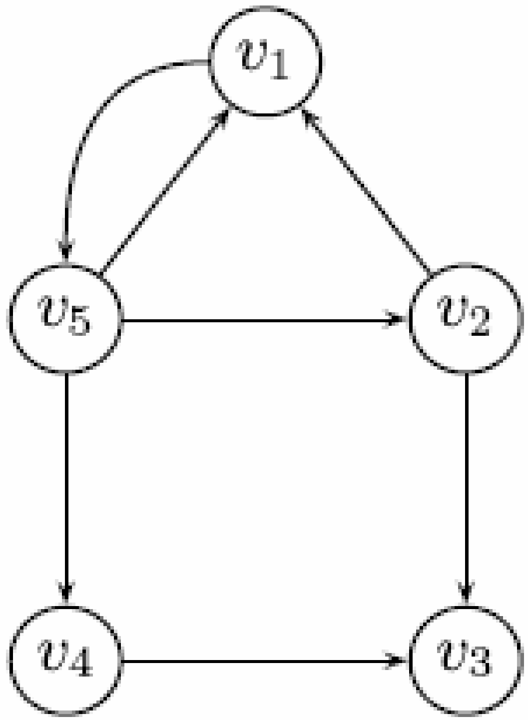
$[3] \rightarrow \quad 1 \quad 4$

$[4] \rightarrow \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5$

$[5] \rightarrow \quad 4$

Κατευθυνόμενος Γράφος

Αν στον ορισμό του γράφου αντικαταστήσουμε τα στοιχεία του E με διατεταγμένα ζεύγη στοιχείων του V, παίρνουμε ένα **προσανατολισμένο ή κατευθυνόμενο** γράφο (*directed graph, digraph*). Δηλαδή $E \subseteq V \times V$.



Συνεκτικός Γράφος

- Εάν υπάρχει δρόμος μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων ο γράφος λέγεται συνεκτικός.
- Ένας κατευθυνόμενος γράφος είναι:
  - *ισχυρά συνεκτικός* αν υπάρχει δρόμος για κάθε ζεύγος κόμβων λαμβάνοντας υπ'όψη τις κατευθύνσεις.
  - *ασθενώς συνεκτικός* αν υπάρχει δρόμος για κάθε ζεύγος κόμβων αγνοώντας τις κατευθύνσεις.

Σε συνεκτικό γράφο ισχύει οτι:

$$n-1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

όπου e= |E| και n=|V|

<u>Αραιοί γράφοι</u>: e=Θ(n)

<u>Πυκνοί γράφοι</u>: e=Θ(n^2)

Για αραιούς γράφους συμφέρει η αναπαράσταση με λίστες γειτνίασης

Αλλες έννοιες

Συνδεδεμένες κορυφές, παραγόμενος (induced) υπογράφος,

Συνεκτικότητα (connectivity), συνεκτικές συνιστώσες (connected components).

Κατευθυνόμενοι γράφοι: ισχυρή και ασθενής συνεκτικότητα.

Πλήρης γράφος (K_n), διμερής γράφος (πλήρης διμερής: $K_{n,m}$).

Επίπεδος γράφος (ανν δεν περιέχει K_5, $K_{3,3}$).

Δένδρα (trees).