Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής και Επιστήμης Υπολογισμών

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα ΙΙ
3η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Ά. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014

Η παράδοση των ασκήσεων μπορεί να γίνει στο μάθημα ή σε ηλεκτρονική μορφή στην διεύθυνση antony.ant1985@gmail.com.
Προθεσμία παράδοσης: 2/5/2014.

Άσκηση 1

Έστω **SPARSE** η κλάση των sparse γλωσσών. Υπενθυμίζουμε ότι μια γλώσσα $L \subseteq \{0,1\}^*$ λέγεται sparse (αραιή) αν έχει το πολύ πολυωνυμικά στοιχεία σε κάθε μήκος string, δηλαδή αν $|L \cap \{0,1\}^n| \leq p(n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και p πολυώνυμο. Δείξτε ότι $\mathbf{SPARSE} \subseteq \mathbf{P_{/poly}}$.

Άσκηση 2

1. Ένα μη-ντετερμινιστικό κύκλωμα C έχει δύο εισόδους $x = x_1x_2\cdots x_n$ και $y = y_1y_2\cdots y_m$. Το κύκλωμα C αποδέχεται το x αν και μόνο αν $\exists y\ C(x,y) = 1$. Δείξτε ότι κάθε γλώσσα στο **MA** έχει μη-ντετερμινιστικά κυκλώματα πολυωνυμικού μεγέθους.

2. Δείξτε ότι $\mathcal{BP} \cdot co\mathbf{NP} = co\mathbf{AM}$.

Άσκηση 3

1. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[0, \log n] = \mathbf{P}$.

2. Δείξτε ότι $\mathbf{PCP}[\log n, 1] \subseteq \mathbf{NP}$.

Άσκηση 4

Έστω το πρόβλημα `GNI` (Graph non-isomorphism), που δοθέντων δύο γράφων εξετάζει αν *δεν* είναι ισομορφικοί. Δείξτε ότι:

$$\mathtt{GNI} \in \mathbf{PCP}[n \log n, 1]$$

(Υπενθυμίζουμε ότι δύο γράφοι $G = (V,E)$ και $G' = (V',E')$ λέγονται ισομορφικοί αν υπάρχει μία μετάθεση $\pi : V \to V'$ τέτοια ώστε $(\pi(u), \pi(v)) \in E'$ αν και μόνο αν $(u,v) \in E$.)

Άσκηση 5

Ένα βασικό μειονέκτημα της κλάσης $\#\mathbf{P}$ είναι ότι δεν περιλαμβάνει αρνητικές συναρτήσεις. Θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την κλάση $\#\mathbf{P}$, ως εξής:
Έστω $\#acc_M(x)$ ο αριθμός των accepting μονοπατιών μιας NTM M. Ως γνωστόν, μια συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ ανήκει στην $\#\mathbf{P}$ αν υπάρχει μία **NP** TM M τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$, $f(x) = \#acc_M(x)$.
Αντίστοιχα ορίζουμε την κλάση **GapP**: Μία συνάρτηση $f : \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ ανήκει στην **GapP** αν υπάρχει

μία **NP** TM M τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$, $f(x) = \#acc_M(x) - \#rej_M(x)$, δηλαδή αν η συνάρτηση f ισούται με την διαφορά του πλήθους των accepting και του πλήθους των rejecting μονοπατιών.

1. Δείξτε ότι αν $f \in \mathbf{GapP}$, τότε και $-f \in \mathbf{GapP}$.
2. Δείξτε ότι $\#\mathbf{P} \subseteq \mathbf{GapP}$.
3. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
   (α′) $f \in \mathbf{GapP}$.
   (β′) Η f μπορεί να γραφεί ως η διαφορά δύο $\#\mathbf{P}$ συναρτήσεων.
   (γ′) Η f μπορεί να γραφεί ως η διαφορά μιας $\#\mathbf{P}$ και μιας $\mathbf{FP}$ συνάρτησης.
4. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, δείξτε ότι $\mathbf{GapP} \subseteq \mathbf{FP}^{\#\mathbf{P}[1]}$.