



Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα II

2η Σειρά Ασκήσεων

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής
Χειμερινό Εξάμηνο 2013-2014

Η παράδοση των ασκήσεων μπορεί να γίνει στο μάθημα ή σε ηλεκτρονική μορφή στην διεύθυνση aanton@corelab.ntua.gr.
Προθεσμία παράδοσης: 31/3/2014.

Άσκηση 1: NP-completeness

1. Δίνεται το πρόβλημα:

Δοθέντος ενός (πεπερασμένου) συνόλου S και μιας συλλογής υποσυνόλων του S , έστω \mathcal{C} , υπάρχει μία διαμέριση του S σε δύο υποσύνολα S_1 και S_2 , τέτοια ώστε να μην υπάρχει υποσύνολο T στην \mathcal{C} τέτοιο ώστε $T \subseteq S_1$ ή $T \subseteq S_2$;

Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete. Παραμένει το πρόβλημα NP-complete αν για κάθε $C \in \mathcal{C}$ ισχύει ότι $|C| \leq 2$;

2. Δίνεται το πρόβλημα:

Δίνεται ένα (πεπερασμένο) σύνολο S , μια συλλογή υποσυνόλων του S , έστω \mathcal{C} , και ένας φυσικός αριθμός $K \leq |\mathcal{C}|$. Υπάρχει μία συλλογή υποσυνόλων του S , έστω \mathcal{B} , τέτοια ώστε $|\mathcal{B}| = K$ και για κάθε $T \in \mathcal{C}$ να υπάρχει οικογένεια συνόλων $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ της οποίας η ένωση να είναι ακριβώς το T ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete. Παραμένει το πρόβλημα NP-complete αν για κάθε $T \in \mathcal{C}$ έχουμε $|T| \leq 2$;

(*Παρατηρήστε ότι η δομή αυτή είναι το διακριτό ανάλογο της Βάσης Περιοχών στην Ανάλυση.)

3. Δίνεται το πρόβλημα STEINER TREE:

Δίνεται γράφος $G = (V, E)$ με βάρη $d_{ij} : E \rightarrow \mathbb{N}$, ένα σύνολο $M \subseteq V$, και ένας φυσικός αριθμός B . Υπάρχει υποδέντρο του G που να περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του M , τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών των ακμών του υποδέντρου να μην υπερβαίνει το B ;

Δείξτε ότι το πρόβλημα είναι NP-complete. Παραμένει το πρόβλημα NP-complete αν όλες οι ακμές έχουν το ίδιο βάρος;

Άσκηση 2

Έστω γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ και κλάση πολυπλοκότητας \mathcal{C} . Η L ονομάζεται “low” για την \mathcal{C} αν $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η γλώσσα L δεν προσφέρει επιπλέον υπολογιστική δύναμη στην \mathcal{C} αν την χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο (oracle). Επιπλέον, για δύο κλάσεις πολυπλοκότητας \mathcal{C} και \mathcal{C}' λέμε ότι η \mathcal{C}' είναι low για την \mathcal{C} αν για κάθε $L \in \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι:

1. $\mathbf{P}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.

2. Η \mathbf{BPP} είναι low για την \mathbf{PP} .

Άσκηση 3

Θεωρώντας δεδομένο ότι $\mathbf{ZPP} = \mathbf{RP} \cap \mathbf{coRP}$, δείξτε ότι μια γλώσσα $L \in \mathbf{ZPP}$ αποφασίζεται σε χρόνο $T(n)$ από μία Πιθανοτική Μηχανή Turing που δίνει πάντοτε σωστή απάντηση, και ισχύει:

$$\mathbb{E}[T(n)] \leq 2(p_1(n) + p_2(n))$$

όπου n το μήκος της εισόδου, $p_1(n), p_2(n)$ τα πολυώνυμα που φράσσουν τους χρόνους εκτέλεσης της \mathbf{RP} και \mathbf{coRP} μηχανής αντίστοιχα, και το " $\mathbb{E}[\cdot]$ " συμβολίζει την μέση ή αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.

Άσκηση 4

Θα μελετήσουμε τον τελεστή " $\mathcal{BP} \cdot$ ", που δρα πάνω σε κλάσεις πολυπλοκότητας, και τις ιδιότητές του:

Ορισμός 1 Έστω \mathbf{C} μια κλάση πολυπλοκότητας και $L \subseteq \Sigma^*$. $L \in \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$ αν υπάρχει μία γλώσσα $A \in \mathbf{C}$, ένα πολυώνυμο p , και μία σταθερά $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$:

$$\Pr_{y \in \{0,1\}^{p(|x|)}} [(x; y) \in A \leftrightarrow x \in L] \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$$

1. Δείξτε ότι $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{BPP}$.
2. Δείξτε ότι αν $\mathbf{C}_1 \subseteq \mathbf{C}_2$, τότε και $\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_1 \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}_2$.
3. Δείξτε ότι $\mathbf{co}(\mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}) \subseteq \mathcal{BP} \cdot (\mathbf{coC})$. Τι συνεπάγεται αυτή η σχέση αν η \mathbf{C} είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα;
4. Δείξτε ότι αν η \mathbf{C} είναι κλειστή ως προς padding¹ τότε $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{BP} \cdot \mathbf{C}$.

όπου $\mathbf{C}, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ κλάσεις πολυπλοκότητας.

Άσκηση 5*

Ορίζουμε την κλάση \mathbf{BPL} ως το ανάλογο για λογαριθμικό χώρο της \mathbf{BPP} : Μία γλώσσα L ανήκει στην κλάση \mathbf{BPL} αν υπάρχει μία Πιθανοτική Μηχανή Turing λογαριθμικού χώρου, τέτοια ώστε:

- Αν $x \in L$, τότε $\Pr_r[M(x, r) \text{ accepts}] \geq 2/3$
- Αν $x \notin L$, τότε $\Pr_r[M(x, r) \text{ accepts}] \leq 1/3$

1. Ορίστε με παρόμοιο τρόπο την κλάση \mathbf{RL} , και δείξτε ότι $\mathbf{RL} \subseteq \mathbf{BPL}$.
2. Δείξτε ότι $\mathbf{BPL} \subseteq \mathbf{SPACE}(\log^2 n)$.
3. Δείξτε ότι $\mathbf{BPL} \subseteq \mathbf{P}$.

¹Μία κλάση είναι κλειστή ως προς padding αν $L \in \mathbf{C} \Rightarrow \{x; y | x \in L \wedge y \in \{0,1\}^*\} \in \mathbf{C}$.

Άσκηση Bonus

(The Boolean Hierarchy)

Σε αυτή την άσκηση, θα μελετήσουμε την κλάση **DP**, και την Ιεραρχία που χτίζεται μέσω αυτής.

Ορισμός 2 Μια γλώσσα L ανήκει στην κλάση **DP** αν και μόνο αν υπάρχουν δύο γλώσσες $L_1 \in \mathbf{NP}$ και $L_2 \in \mathbf{coNP}$, τέτοιες ώστε $L = L_1 \cap L_2$.

(το “D” στον ορισμό προέρχεται από το Difference)

1. Παρατηρήστε ότι $\mathbf{DP} \neq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$, όπως και ότι ο ορισμός της κλάσης **DP** είναι “συντακτικός”, οπότε είναι φυσιολογικό να έχει complete προβλήματα. Δείτε περισσότερα στο βιβλίο του Παπαδημητρίου [1], σελίδες 412-415.
 - (α') Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \cup \mathbf{coNP} \subseteq \mathbf{DP}$.
 - (β') Με παρόμοιο τρόπο όπως στο [1], δείξτε ότι τα προβλήματα EXACT-CLIQUE και CRITICAL-HC² είναι **DP**-complete.
2. Η κλάση **DP** επεκτείνεται φυσιολογικά στην Boolean Hierarchy ως εξής:

Ορισμός 3 Η κλάση \mathbf{DP}_n ορίζεται για κάθε $n \geq 0$:

- $\mathbf{DP}_0 = \mathbf{P}$
- $\mathbf{DP}_{n+1} = \{A \cup B \mid A \in \mathbf{DP}_n, B \in \mathbf{NP}\}$, αν n είναι άρτιος
- $\mathbf{DP}_{n+1} = \{A \cap B \mid A \in \mathbf{DP}_n, B \in \mathbf{coNP}\}$, αν n είναι περιττός

Επίσης ορίζουμε:

$$\mathbf{BH} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{DP}_n$$

- (α') Οι κλάσεις \mathbf{DP}_n έχουν complete σύνολα! Έστω το πρόβλημα \mathbf{GCOLOR}_k : δοθέντος ενός γράφου G , είναι ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ (ο ελάχιστος απαραίτητος αριθμός χρωμάτων για να χρωματιστεί ο G) περιττός και μεταξύ του $3k$ και του $4k$; Δείξτε ότι για κάθε περιττό φυσικό k , το πρόβλημα \mathbf{GCOLOR}_k είναι \mathbf{DP}_k -complete.
- (β') Δείξτε ότι η Boolean Hierarchy **BH** είναι γνήσια (δηλαδή $\mathbf{DP}_n \subsetneq \mathbf{DP}_{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$) εκτός αν η Πολυωνυμική Ιεραρχία καταρρέει.

²CRITICAL-HC: “Δοθέντος γράφου $G = (V, E)$, ισχύει ότι ο γράφος G δεν έχει κύκλο Hamilton, αλλά κάθε γράφος G' που προέρχεται από τον G προσθέτοντας μία καινούργια ακμή έχει κύκλο Hamilton;”