Παράλληλος προγραμματισμός διαφάνειες στο μάθημα Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα II

Χρήστος Πηλιχός

Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Λογικής και Αλγορίθμων

Μάθημα της ΔΙΙΙΙ^{ης} Ιανουαρίου XXΔΙΙΙ

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Λογικό κύκλωμα C, είναι το κατευθυνόμενο, ακυκλικό γράφημα, στο οποίο κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε κάποια λογική πύλη. Το κύκλωμα δέχεται είσοδο της μορφής $\{0,1\}^m$, και επιστρέφει έξοδο της μορφής $\{0,1\}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Ορίζονται:

- Μέγεθος του C είναι το πλήθος των κόμβων του.
- Βάθος του C είναι το πλήθος των κόμβων του στο μέγιστο μονοπάτι του.

Ομοιόμορφη οικογένεια λογικών κυκλωμάτων, νοείται πως υπάρχει κάποια συνθήκη στην οικογένεια κυκλωμάτων, η οποία επιτρέπει να χαρακτηρίζεται το κύκλωμα από το δείκτη n που του αντιστοιχεί. Εδώ, ο δείκτης υποδηλώνει το πλήθος των λογικών πυλών που περιέχουν τα λογικά κυκλώματα.

Έστω $\mathcal{C} = (C_0, C_1, \ldots)$ ομοιόμορφη οικογένεια λογικών κυκλωμάτων και $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ορίζονται:

- Παράλληλος χρόνος της $\mathcal{C}$ είναι $\mathcal{O}(f(n))$ εάν $\forall n$ το βάθος του $C_n \in \mathcal{C}$ είναι $\mathcal{O}(f(n))$.
- Έργο για τη $\mathcal{C}$ είναι $\mathcal{O}(g(n))$ εάν $\forall n$ το μέγεθος του $C_n \in \mathcal{C}$ είναι $\mathcal{O}(g(n))$.

Ορισμός (Κλάση ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥΧΡΟΝΟΥ/ΕΡΓΟΥ)

Ορίζεται

$$\mathbf{PT}/\mathbf{WK}(f(n), g(n))$$

να είναι η κλάση όλων των γλωσσών $L \subseteq \{0,1\}^*$ για τις οποίες υπάρχουν κυκλώματα $\mathcal{C}$ που να αποφασίζουν για την C σε παράλληλο χρόνο $\mathcal{O}(f(n))$ και με έργο $\mathcal{O}(g(n))$.

Περιοδεύων Πωλητής: Ο παράλληλος προγραμματισμός δεν επαρκεί. Απαιτείται η μελέτη 2^n περιοδειών, με n το πλήθος των πόλεων. Από τη σχέση

$$\text{έργο} = (\text{παράλληλος χρόνος}) \times (\text{πληθος επεξεργαστών})$$

προκύπτει πως

- είτε ο παράλληλος χρόνος θα έπρεπε να είναι εκθετικός,
- είτε θα έπρεπε να υπάρχουν διαθέσιμοι εκθετικά το πλήθος πολλοί επεξεργαστές,
- είτε και τα 2 ταυτόχρονα!

Περιεχόμενα

Ένα πρόγραμμα RAM είναι μία ακολουθία $\Pi = (\pi_0, \ldots, \pi_m)$ εντολών που μεταβαίνουν/επεξεργάζονται θέσεις μνήμης.

Ένα πρόγραμμα PRAM είναι μια ακολουθία $P = (\Pi_1, \ldots, \Pi_q)$, που αποτελείται από προγράμματα RAM που λειτουργούν παράλληλα & επεξεργάζονται από κοινού τα δεδομένα.

Το μέγεθος της ακολουθίας του προγράμματος PRAM ενδέχεται να μην είναι σταθερή, αλλά να είναι κάποια συνάρτηση $p(m, n)$, όπου στην είσοδο I υπάρχουν m ακέραιοι και η αναπαράστασή της έχει μήκος $\ell(i) = n$. Συμβολίζεται, $P_{m,n}$.

Από τους διαφορετικούς συνδυασμούς για τα m, n δημιουργείται η οικογένεια

$$\mathcal{P} = (P_{m,n} : \quad m, n \geq 0)$$

των παράλληλων προγραμμάτων τυχαίας προσπελάσεως.

Περιεχόμενα

Ορισμός (Η κλάση πολυπλοκότητος **NC**)

Ορίζεται η κλάση πολυπλοκότητος **NC** *(Nick's Class,* ▸ Nick Pippenger*)*

$$\mathbf{NC} = \mathbf{PT}/\mathbf{WK}(\log^k n, n^k)$$

των προβλημάτων αποφάσεως, που επιλύονται σε πολυλογαριθμικό παράλληλο χρόνο και πολυωνυμικό έργο.

Η κλάση **NC** απεικονίζει τη διαίσθηση που υπάρχει για τα προβλήματα που επιλύονται αποτελεσματικά από παράλληλους υπολογιστές, όπως ακριβώς η κλάση **P** για την αποτελεσματική επίλυση προβλημάτων σε ακολουθιακό πλαίσιο (▸ sequential context).

Ανοικτά ερωτήματα στην Επιστήμη των Υπολογιστών

Ισχύει **P** = **NC**;

Αντίστοιχα,

Ορισμός (Η κλάση πολυπλοκότητος $\mathbf{NC_j}$)

Ορίζεται η κλάση πολυπλοκότητος $\mathbf{NC_j}$,

$$\mathbf{NC_j} = \mathbf{PT}/\mathbf{WK}(\log^j n, n^k)$$

των προβλημάτων αποφάσεως που επιλύονται σε δεδομένο πολυλογαριθμικό παράλληλο χρόνο και πολυωνυμικό έργο.

- Η ελευθερία του εκθέτη k υποδηλώνει την ελευθερία στο βαθμού του πολυωνύμου για το έργο που απαιτείται.
- **NC** Ιεραρχία: $\mathbf{NC_1} \subseteq \mathbf{NC_2} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{NC_i} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{NC}$.
- Το πρόβλημα Προσβασιμοτητα $\in \mathbf{NC_2}$. Απόδειξη

Θεώρημα (Κλειστότητα της NC ως προς τις αναγωγές)

Εάν η γλώσσα L ανάγεται στη $L' \in \mathbf{NC}$, τότε $L \in \mathbf{NC}$.

Πόρισμα (Κλειστότητα της $\mathbf{NC_j}$ ως προς τις αναγωγές)

Εάν η γλώσσα L ανάγεται στη $L' \in \mathbf{NC_j}$, $j \geq 2$, τότε $L \in \mathbf{NC_j}$.

Ανοικτά ερωτήματα στην Επιστήμη των Υπολογιστών

$\exists i \geq 1: \ \mathbf{NC_i} = \mathbf{NC_{i+1}}$; Εάν ναι, τότε τί ισχύει από τα:

1. $\mathbf{NC_1} \subset \mathbf{NC_2} \subset \ldots \subset \mathbf{NC_i} = \ldots = \mathbf{NC_{i+j}} \subset \mathbf{NC}$.
2. $\mathbf{NC_1} \subset \mathbf{NC_2} \subset \ldots \subset \mathbf{NC_i} = \ldots = \mathbf{NC_{i+j}} = \mathbf{NC}$.

Υπάρχουν προβλήματα για τα οποία πρέπει να υπολογισθούν εκθετικά το πλήθος στιγμιότυπα. Οπότε με χρήση παράλληλου προγραμματισμού μπορεί να δειχθεί σε ποιά κλάση ανήκουν.

Ορισμός (Το πρόβλημα της ΠεριττηΜεγιστηΡοη)

Έστω το δίκτυο $N = (V, E, s, t, c)$. Είναι η μέγιστη ροή του δικτύου περιττός αριθμός;

Θεώρημα

Το πρόβλημα ΠεριττηΜεγιστηΡοη *είναι* **P**-*πλήρες.*

Απόδειξη. Με αναγωγή από το πρόβλημα ΜονοτονηΚυκλωματικηΤιμη. □

Περιεχόμενα

Ευρύτερα, ορίζεται η τυχαιοποιημένη κλάση **NC**.

Ορισμός (Η κλάση πολυπλοκότητος **RNC**)

Μια γλώσσα L ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητος **RNC**, *εάν υπάρχει μια ομοιόμορφη οικογένεια λογικών κυκλωμάτων από την κλάση* **NC**, *με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Το κύκλωμα C_n, που δέχεται εισόδους μήκους n, έχει $n + m(n)$ λογικές πύλες· το $m(n)$ έχει πολυωνυμικό μήκος.*
2. *Για τη συμβολοσειρά x, με $\ell(x) = n$, το κύκλωμα C_n με είσοδο $x; y$, $\ell(y) = m(n)$:*
   - *Εάν $x \in L$, τότε τουλάχιστον για τις μισές από τις $2^{m(n)}$ το πλήθος δυαδικές συμβολοσειρές, το κύκλωμα αποφαίνεται* Αληθεια.
   - *Εάν $x \notin L$, τότε το κύκλωμα αποφαίνεται* Ψεμα *για κάθε y.*

Τα προβλήματα αποφάσεως δεν αποδίδουν μόνο την απάντηση στο εάν υπάρχει λύση στο εν λόγωι πρόβλημα. Με χρήση τεχνικών Δυναμικού Προγραμματισμού για να αποφανθεί ο αλγόριθμος πόσες λύσεις υπάρχουν, θα τις έχει υπολογίσει στα ενδιάμεσα βήματα (ανακαλέστε το πρόβλημα του ΣΑΚΙΔΙΟΥ).

Ανατίθενται βάρη στις ακμές του γραφήματος. Με χρήση ενός **NC** αλγορίθμου μπορεί να υπολογισθεί το τέλειο ταίριασμα με το μικρότερο βάρος w^*.

Γνωρίζοντας τη τιμή w^* είναι εύκολο να επαληφευθεί εάν κάποια ακμή βάρους w_j, του γραφήματος ανήκει στο τέλειο ταίριασμα. Εάν η ακμή άνηκε στο τέλειο ταίριασμα για το αρχικό γράφημα τότε ο **NC** αλγόριθμος θα επέστρεφε $w^* - w_j$ για το εναπομείνων γράφημα.

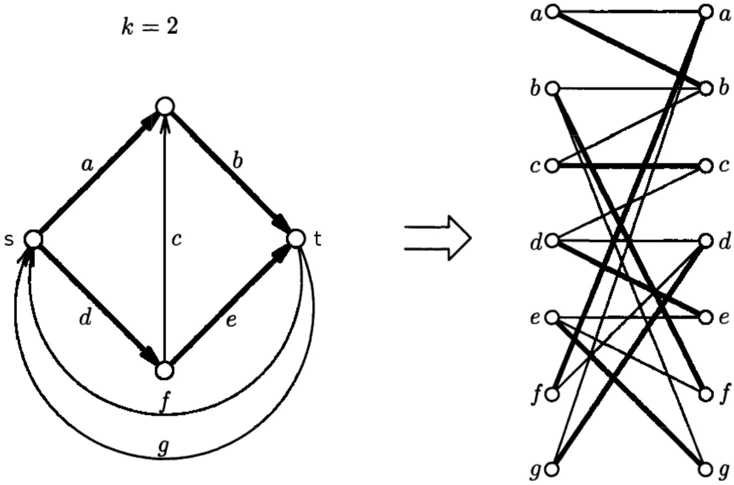
Προσεγγιστικός RNC αλγόριθμος:

Δοθέντως ενός δικτύου $N = (V, E, s, t)$, με μοναδιαίο κόστος στις ακμές του, προστείθενται οι δύο αρχικοί κόμβοι s και t καθώς και k κατευθυνόμενες ακμές (f, t), όπου k η μέγιστη ροή που επιθυμούμε να ελέγξουμε.

Σχηματίζεται το διμερές γράφημα $G = (A \cup B, E)$ με κορυφές σε κάθε πλευρά του, τις πλευρές του δικτύου που είχε προκύψει με την πρόσθεση των k ακμών, καθώς επιπλέον ακμές (e, e') όπου το πέρας της e προσπίπτει με την αρχή της e' στην ίδια κορυφή. Τέλος, περιέχει ακμές από κορυφές του ενός μέρους στους εαυτούς τους στο έτερο μέρος για κάθε κορυφή που αντιστοιχεί σε ακμή του αρχικού δικτύου.

Είναι εύκολο μέσω ενός **RNC** αλγορίθμου με χρήση της δυαδικής αναζήτησης να βρεθεί το τέλειο ταίριασμα στο διμερές γράφημα και κατ΄ επέκτασην η μέγιστη ροή στο αρχικό δίκτυο.

Αναγωγή από τη ΜεγιστηΡοη στο ΤελειοΤαιριασμα



Περιεχόμενα

Ορισμός (Η κλάση πολυπλοκότητος **AC**)

Ορίζεται η κλάση πολυπλοκότητος **AC**,

$$\mathbf{AC} = \bigcup_{j \geq 0} \mathbf{AC}_j$$

όπου

$$\mathbf{AC_j} = \mathbf{PT}/\mathbf{WK}(\log^j n, n^k)$$

και κάθε κλάση $\mathbf{AC_j}$ *περιέχει κυκλώματα με απεριόριστο αριθμο εισόδων στις λογικές πύλες* ΚΑΙ *και* Η.

Η **NC** και **AC** Ιεραρχία:

$$\mathbf{NC_i} \subseteq \mathbf{AC_i} \subseteq \mathbf{NC_{i+1}}$$

Άρα, $\mathbf{NC} = \mathbf{AC}$.

Ορισμός (Η κλάση πολυπλοκότητος TC)

Ορίζεται η κλάση πολυπλοκότητος **TC**,

$$\mathbf{TC} = \bigcup_{j \geq 0} \mathbf{TC}_j$$

όπου

$$\mathbf{TC_j} = \mathbf{PT}/\mathbf{WK}(\log^j n, n^k)$$

και κάθε κλάση $\mathbf{TC_j}$ *περιέχει κυκλώματα με απεριόριστο αριθμο εισόδων στις λογικές πύλες* Και, Η *και* Πλειοψηφια.

Η λογική πύλη Πλειοψηφια είναι ψευδής εάν οι μισές ή παραπάνω από τις εισόδους της είναι ψευδείς.

$$\text{Πλειοψηφια}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - 1/2}{n} \right\rfloor$$

Περιεχόμενα

Η **NC**, **AC** και **TC** Ιεραρχία:

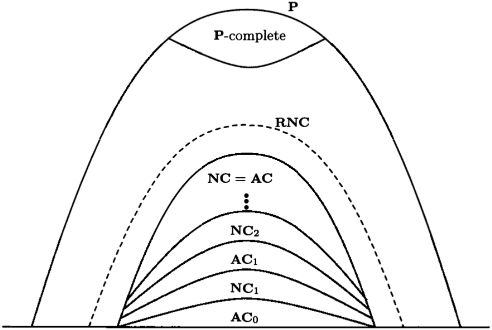
$$\mathbf{NC_i} \subseteq \mathbf{AC_i} \subseteq \mathbf{TC_i} \subseteq \mathbf{NC_{i+1}}$$

Γνησιότητα **NC**, **AC** και **TC** Ιεραρχίας:

$$\mathbf{NC_0} \subsetneq \mathbf{AC_0} \subsetneq \mathbf{TC_0} \subseteq \mathbf{NC_1}$$

Η **L**, **NL**, **NC**, **AC**, **TC** και **P** Ιεραρχία:

$$\mathbf{NC_1} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{NL} \subseteq \mathbf{AC_1} \subseteq \mathbf{TC_1} \subseteq \mathbf{NC_2} \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{P}$$



Παράρτημα

Nick Pippenger

Ο **Nicholas John Pippenger** είναι ερευνητής στην Επιστήμη των Υπολογιστών.

Έχει μεταπτυχιακό στις Φυσικές Επιστήμες από το Shimer College και διδακτορικό από το MIT.

Είναι παντρεμένος με την Maria Klawe, πρόεδρο του Harvey Mudd College.

Προς τιμήν του η κλάση **NC** (Nick's Class) φέρει το όνομά του, καθ' υπόδειξην του Stephen Cook, για τη μελέτη του πάνω στα λογικά κυκλώματα με πολυλογαριθμικό βάθος και πολυωνυμικό μέγεθος.

Επιστροφή

Ακολουθιακό και Υπακολουθιακό πλαίσιο

Ακολουθιακό πλαίσιο

Η διαφορά ανάμεσα σε πολυωνυμική και εκθετική αύξηση καθίσταται αισθητή σε χαμηλά επίπεδα. Επί παραδείγματι, στις n^3 και 2^n η διαφορά είναι εμφανής για $n = 20$.

Υπακολουθιακό πλαίσιο

Συναρτήσεις όπως οι $\log n$ και $\sqrt{n}$ είναι ασυμπτωτικά διαφορετικές. Η αίσθηση της διαφοράς τους καθίσταται παρατηρήσιμη για αρκετά μεγάλες τιμές του n, έστω $n = 2^{20}$.

Επιστροφή

Προσβασιμότητα $\in \mathbf{NC_2}$

Έστω $A = \mathbb{M}^{n \times n}$ ο πίνακας συνδέσεων του γραφήματος, όπου έχουν τεθεί $A_{ii} = 1, \forall i$. Μέσω του πολλαπλασίασμού πινάκων σε παράλληλους επεξεργαστές:

$$A, \quad A \cdot A = A^2, \quad A^2 \cdot A^2 = A^4, \quad A^4 \cdot A^4 = A^8, \quad \ldots$$

βρίσκονται τα μονοπάτια μήκους $1, 2, 4, 8$ κ.ο.κ.. Η μεταβατική κλειστότητα του γραφήματος είναι ο πίνακας $A^n = A^{2^{\lceil \log_2 n \rceil}}$, υπολογίζεται σε $\lceil \log_2 n \rceil$ βήματα. Μέσω του παράλληλου πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτει πως ο υπολογισμός της μεταβατικής κλειστότητος χρειάζεται $\mathcal{O}(\log^2 n)$ παράλληλο χρόνο με $\mathcal{O}(n^3 \log n)$ έργο.

▸ Επιστροφή

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

- Χρίστος Παπαδημητρίου
  Computational Complexity.
  Dover Publications, 1994.
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Nick_Pippenger*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/TC_(complexity)*