Boolean Logic

Ορισμός: Προτασιακοί τύποι είναι οι εκφράσεις που ορίζονται επαγωγικά ως εξής:
(i) Τα σύμβολα προτάσεων είναι προτασιακοί τύποι.
(ii) Αν φ και ψ είναι προτασιακοί τύποι τότε οι $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\neg \phi)$.
(iii) Μόνο οι εκφράσεις που σχηματίζονται από τα i,ii είναι προτασιακοί τύποι.

Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας.

Άσκηση:
4. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.

Ορισμός: Απονομή αλήθειας ονομάζουμε κάθε συνάρτηση V : A -> {F,T} με A σύνολο προτασιακών μεταβλητών.

V' επέκταση της V στο σύνολο των προτασιακών τύπων είναι ονομάζεται συνάρτηση από P->{F,T} τ.ω V(φ) = V'(φ) αν φ προτασιακή μεταβλητή και

i) αν $\phi \equiv (\neg \psi)$ τότε V'(φ) = T αν V'(ψ) = F αλλιώς F
ii) αν $\phi \equiv (\chi \wedge \psi)$ τότε V'(φ) = T αν V'(χ) = T και V'(ψ) = T αλλιώς F
iii) αν $\phi \equiv (\chi \vee \psi)$ τότε V'(φ) = T αν V'(χ) = T ή V'(ψ) = T αλλιώς F

Ορισμός : Συνάρτηση G ονομάζεται Boole αν G:$\{F,T\}^k$->{F,T}. Οπότε αν έχουμε ένα προτασιακό τύπο a (που χρησιμοποιεί k προτασιακές μεταβλητές), τότε υπάρχει συνάρτηση G τ.ω $B_a^k = G$ για κάθε απονομή αλήθειας V (λόγω ορισμού).

Θεώρημα: Για κάθε συνάρτηση G Boole, υπάρχει προτασιακός τύπος a τ.ω $B_a^k = G$.

Απόδειξη:

Αν είναι $G \equiv F$ τότε ο προτασιακός τύπος θα είναι $\neg A \cap A$. Αν η G έχει και T αποδόσεις τότε : ο προτασιακός τύπος θα είναι $g_{t1} \cup g_{t2} .... \cup g_{tl}$ όπου $gi = bi1 \cap bi2 ... \cap bik$ με $bij = Aj$ αν είναι T η (i,j) θέση στο π.ο είναι T αλλιώς $bj = \neg Aj$ και η γραμμή i αντιστοιχίζεται σε T. Προφανώς $B_a^k = G$.

Ορισμός: Επάρκεια συμβόλων επιτυγχάνουμε όταν έχουμε ένα σύνολο από σύμβολα τα οποία μπορούν να αναπαραστήσουν κάθε συνάρτηση Boole. Από προηγουμένως φαίνεται ότι το $\{\wedge, \vee, \neg\}$ είναι επαρκές. Επίσης εύκολο είναι να δειχθεί ότι $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$ είναι επαρκή.

Λήμμα: Το $\{\wedge, \vee\}$ δεν είναι επαρκές.
Απόδειξη: Έστω η προτασιακή μεταβλητή A. Τότε χρησιμοποιώντας μόνο το $\{\wedge, \vee\}$ δεν επιτυγχάνουμε το $\neg A$.Με επαγωγή θ.δ.ο κάθε προτασιακός τύπος θα έχει ως συνάρτηση Boole την A.
Για την προτασιακή μεταβλητή έχουμε προφανώς για Boole την A.

Αν τώρα a,b προτασιακοί τύποι με συνάρτηση Boole την A, τότε $a \wedge b, a \vee b$ και η A είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι. Άρα δεν γίνεται να υλοποιηθεί η $\neg A$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\{\wedge, \rightarrow\}$ δεν είναι επαρκές. Ομοίως $\{\wedge, F, T\}$

Συμπάγεια

Ορισμός: Ένα σύνολο Σ από προτασιακούς τύπους ονομάζεται ικανοποιήσιμο ανν υπάρχει απονομή αλήθειας που ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Σ.

Θεώρημα Συμπάγειας: Ένα σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο ανν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο (δηλ. κάθε πεπερασμένο υποσύνολο είναι ικανοποιήσιμο).
Για να δειχθεί το παραπάνω, δυσκολία έχουμε όταν Σ άπειρο. Αν Σ άπειρο τότε θα πρέπει να το «γεμίσουμε» με όσους προτασιακούς τύπους λείπουν έτσι ώστε το σύνολο που θα φτιαχτεί να περιέχει όλους τους προτασιακούς τύπους που είναι T και να μην περιέχει ότι είναι F.

Απόδειξη: (Για αριθμήσιμο πλήθος προτασιακών μεταβλητών) =>

Αφού οι προτασιακές μεταβλητές είναι αριθμήσιμες τότε : a0,a1,a2,.. μία αρίθμηση των προτασιακών τύπων (είναι αριθμήσιμο σύνολο). Ορίζουμε το σύνολο Δ ως εξής:

Δ0 = Σ
Δ1 = Δ0 U {a0} αν Δ1 πεπερασμένα ικανοποιήσιμο αλλιώς Δ0 U { $\neg a0$ }
..
..
Δn = Δn-1 U {an}αν Δn πεπερασμένα ικανοποιήσιμο αλλιώς Δn U { $\neg an$ }
κλπ και Δ = UΔi.

Πρόταση: Δi πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Επαγωγή. Επαγωγικό βήμα:
Έστω σύνολο Σ πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Τότε Σ U a ή Σ U $\neg a$ (*) είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Έστω Σ0,Σ1 υποσύνολα του Σ πεπερασμένα. Τότε ανάλογα με το αν η απονομή αλήθειας της V'(a) είναι T ή F ανήκει η a ή η άρνησή της στο (*). Αρκεί ν.δ.ο δεν γίνεται για κάθε απονομή αλήθειας που τα ικανοποιεί να έχω στο ένα T και στο άλλο F. Έστω ότι έρχομαι σε αντίφαση για κάθε απονομή αλήθειας. Θεωρώ το Σ0 U Σ1 υποσύνολο του Σ. Τότε δεν θα υπήρχε απονομή αλήθειας λόγω της υπόθεσης (αφού ούτε a ούτε η άρνηση της γίνεται να ανήκει). Άτοπο αφού Σ πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Άρα Δ πεπερασμένα ικανοποιήσιμο (αφού κάθε υποσύνολο του Δ, είναι υποσύνολο κάποιου Δi).

Έστω τώρα V τ.ω V(A) = T iff A ανήκει στο Δ. Θ.δ.ο V'(φ) = T ανν φ ανήκει στο Σ. Έστω A1,A2,…,Ak οι προτασιακές μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν για το φ. Ορίζω το υποσύνολο του Σ , Σ0 = {B1,B2,…,Bk,φ}, όπου Bi=Ai ανν Ai ανήκει στο Σ αλλιώς Bi = $\neg Ai$. Πρέπει Σ0 ικανοποιήσιμο και άρα υπάρχει V1 τ.ω V1(Bi) = T για κάθε i και V1(φ)= T => V1 = V' (στο σύνολο των προτασιακών μεταβλητών που χρησιμοποιήθηκαν). Άρα V'(φ) = T. (προφανώς αν φ δεν ανήκει στο Σ τότε ανήκει το

$(\neg\phi)$ και όμοια V'($(\neg\phi)$)=T άρα V'(φ) = F). Επομένως V' ικανοποιεί κάθε φ που ανήκει στο Δ και άρα κάθε φ που ανήκει στο Σ….

Παρατήρηση: Αν οι προτασιακές μεταβλητές ήταν υπεραριθμήσιμες τότε ήθελε λήμμα Zorn για να αποδειχθεί η ύπαρξη της Δ.

Πόρισμα: Αν Σ |=τ τότε υπάρχει Σ0 πεπερασμένο τ.ω Σ0 |= τ.
Απόδειξη: Έστω ότι δεν υπήρχε πεπερασμένο Σ0. Τότε Σ U {τ} δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο και άρα το Σ U {τ} δεν είναι ικανοποιήσιμο. Όμως Σ |= τ και άρα αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο καταλήγουμε σε άτοπο (γιατί θα ήταν και το Σ U {τ}. Αν Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο, τότε υπάρχει υποσύνολο πεπερασμένο μη ικανοποιήσιμο Σ', οπότε Σ' |= τ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Hornsat-P complete

Horn clauses:

a) y (implication)

b) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee .... \vee \neg x_{n-1} \vee \neg x_n \vee y$ (implication)

c) $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee .... \vee \neg x_{n-1} \vee \neg x_n$ (purely negative)

Πρόβλημα: Έχουμε μία Boolean formula που είναι σύζευξη από Horn clauses. Είναι ικανοποιήσιμη , δηλαδή υπάρχει απόνομη αλήθειας V τ.ω να είναι η formula TRUE?

Αλγόριθμός: Θεωρώ ένα σύνολο T. Όσες προτασιακές μεταβλητές $x_i \in T$ τότε $V(x_i)$ = TRUE και οι υπόλοιπες θα είναι FALSE.

Αρχικοποίηση: T είναι το κενό σύνολο.

Βήμα κ: Βρίσκω ένα implication από τη formula που είναι μη ικανοποιήσιμο ως προς τη V, έστω $\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee .... \vee \neg x_{n-1} \vee \neg x_n \vee y$, οπότε $x_i \in T$ (μπορεί το implication να είναι μόνο το y) και y δεν ανήκει στο T και βάζω και το y στο T.

Ο αλγόριθμος θα τερματίσει γιατί τα implications που είναι μη ικανοποιήσιμα ως προς τη V λιγοστεύουν καθώς το T αυξάνεται. Όταν τερματίσει ο αλγόριθμος τότε προφανώς όλα τα implication clauses θα ικανοποιούνται. Αν T' ένα άλλο σύνολο που ικανοποιεί όλα τα implication clauses τότε $T \subseteq T'$. Για να τσεκάρω την ικανοποιησιμότητα της formula αρκεί να τσεκάρω αν το T ικανοποιεί όλα τα purely negative clauses.

Boolean Circuits

Θεωρούμε γράφο C = (V,E) άκυκλο τ.ω κάθε κόμβος έχει label από το σύνολο {T,F, $\wedge,\vee,\neg$,x1,x2,…}. Αφού ο γράφος είναι άκυκλος μπορούμε να αριθμήσουμε τις κορυφές τ.ω για κάθε ακμή του γράφου (i,j) να έχουμε i<j. Αν το label κάποιου κόμβο ανήκει στο {T,F,x1,x2,…} τότε το indegree της κορυφής είναι 0, αν είναι $\neg$

τότε το indegree της είναι 1 και αν το label ανήκει στο $\{ \wedge, \vee \}$ τότε το indegree της είναι 2. Η κορυφή n είναι το "output" του γράφου. Η απονομή αλήθειας ορίζεται ως εξής:

V'(i) = T αν το label της i κορυφής είναι T και V'(i) = T αν το label της i είναι T.
V'(i) = V(i) αν το η κορυφή i έχει ως label προτασιακή μεταβλητή.
Αν η κορυφή i έχει label $\neg$ τότε V'(i) έχει την αντίθετη τιμή από το V'(j) με j τ.ω (j,i) ακμή του γράφου. Ομοίως ορίζεται και για τα υπόλοιπα labels.

Θεώρημα:

Υπάρχει n-Boolean συνάρτηση, n >=2 τ.ω δεν υπάρχει Boolean circuit με $\frac{2^n}{2n}$ ή λιγότερους κόμβους που να την υπολογίζει.

Αποτελεσματικότητα και Υπολογισιμότητα
Effectiveness and Computability

Ορισμός: Ένα σύνολο Σ καλείται decidable ανν υπάρχει effective procedure που να αποφασίζει αν μία έκφραση a ανήκει ή όχι στο Σ.

Παρατήρηση : Αν Σ είναι πεπερασμένο, απλά ελέγχω αν το a υπάρχει στην πρώτη ή δεύτερη κλπ θέση.

Ορισμός : Ένα σύνολο Σ καλείται effectively enumerable αν μπορώ με κάποια effective procedure να αριθμήσω τα στοιχεία του Σ.

Θεώρημα: Ένα σύνολο Σ είναι effectively enumerable ανν υπάρχει effectively procedure τ.ω δοθείσας μιας έκφρασης ε, επιστρέφει yes αν αυτή ανήκει στο Σ.

Απόδειξη: Αν Σ είναι effectively enumerable τότε αριθμώντας τα στοιχεία του, αν συναντήσουμε το ε τότε επιστρέφουμε yes. (Ευθύ).

Αν υπάρχει procedure τότε, τρέχουμε ένα βήμα της για την πρώτη έκφραση, 2 βήματα για την πρώτη και τη δεύτερη κλπ. Αν επιστρέψει yes για κάποιο στοιχείο το τοποθετούμε στη λίστα. (Αντίστροφο)

Kleene's Theorem. Ένα σύνολο είναι decidable ανν αυτό και το συμπλήρωμα του είναι effectively enumerable. (απλό ;)).

Θεώρημα: Αν Σ ένα decidable σύνολο από συναρτησιακούς τύπους, τότε το σύνολο των ταυτολογικά ισοδύναμων προτάσεων με το Σ είναι effectively enumerable.

Απόδειξη: Αρκεί το Σ να είναι effectively enumerable. Έστω s1,s2,s3,….οι συναρτησιακοί τύποι του Σ και ε κάποια έκφραση. Ελέγχω πρώτα αν ε ταυτολογία. Έπειτα ελέγχω αν {s1} |= ε, αν όχι {s1,s2} |= ε, αν όχι {s1,s2,s3} |= ε κλπ. Από πόρισμα από θεώρημα συμπάγειας, αν Σ |= ε, τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο Σ0 τ.ω Σ0 |= ε και άρα θα επιστρέψει yes αν ε ανήκει στο σύνολο των εκφράσεων q τ.ω Σ |= q.

Άσκηση:

4. Μία πρόταση που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο ↔ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε προτασιακό σύμβολο απαντάται έναν άρτιο αριθμό φορών.

Απόδειξη:

Λήμμα: κάθε προτασιακός τύπος που δεν είναι προτασιακή μεταβλητή είναι ισοδύναμος σημασιολογικά με έναν τύπο της μορφής.
$(a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow (an-1 \leftrightarrow an))..)$

Επαγωγή:

$(a1 \leftrightarrow a2)$
$(a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow a3))$

$((a1 \leftrightarrow a2) \leftrightarrow a3) \mid == \mid (a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow a3))$ προσεταιριστική ιδιότητα.

Έστω $\phi \equiv (\chi \leftrightarrow \psi)$ τότε από Ε.Υ $\chi \equiv (a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow (an-1 \leftrightarrow an))..)$ και $\psi \equiv (b1 \leftrightarrow (b2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow (bm-1 \leftrightarrow bm))..)$. Χρησιμοποιώντας μία φορά την προσεταιριστική ιδιότητα έχω ότι: $\phi \mid == \mid (a1 \leftrightarrow ((a2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow (an-1 \leftrightarrow an))..) \leftrightarrow \psi)$ οπότε μετά από n-1 βήματα έχω $\phi \mid == \mid (a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow ... \leftrightarrow (an-1 \leftrightarrow (an \leftrightarrow \psi))..))$ και άρα το ζητούμενο.

Λήμμα 2:

$(a1 \leftrightarrow (a2 \leftrightarrow a3)) \mid == \mid (a2 \leftrightarrow (a1 \leftrightarrow a3))$, εύκολο.
Οπότε από λήμμα 1 και 2 έχω ότι κάθε προτασιακός τύπος (μόνο με σύμβολο $\leftrightarrow$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν τύπο της παραπάνω μορφής ο οποίος έχει «ομαδοποιημένες τις προτασιακές μεταβλητές». Προφανώς αν κάποια προτασιακή μεταβλητή έχει περιττό πλήθος τότε θεωρώντας την ως F και όλες τις άλλες T τότε θα έχω ότι ο τύπος επιστρέφει F. Αν έχουν όλες άρτιο πλήθος τότε O.K…

Αξιωματικό Σύστημα τύπου Hilbert

Έχουμε το εξής σύνολο λογικών αξιωμάτων:
A1 $(\phi \to (\psi \to \phi))$ (παρατηρώ ότι είναι ταυτολογία και διαισθητικά σημαίνει ότι αφού ισχύει το φ, προκύπτει από κάθε ψ)
A2 $(\phi \to (x \to y)) \to ((\phi \to x) \to (\phi \to y))$ (παρατηρώ ότι είναι ταυτολογία) (μεταβατικότητα)
A3 $((\neg y) \to (\neg \phi)) \to (((\neg y) \to \phi) \to y)$ (παρατηρώ ότι είναι ταυτολογία) (το άτοπο)

MODUS PONENS: ϕ και $(\phi \to y)$ τότε y.

Ορισμοί:
Θεωρία: Ένα σύνολο από προτασιακούς τύπους που είναι αξιώματα (μη λογικά).
Απόδειξη στη θεωρία Τ: Μία πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων φ1,φ2,…,φν τ.ω για κάθε i, το φi είναι λογικό αξίωμα, είτε ανήκει στο Τ, είτε Υπάρχουν j,k τ.ω φi προέκυψε από τα φj,φk με MP.
Θεώρημα: Το τελευταίο στοιχείο κάποιας απόδειξης.
Άλλος ορισμός: Κάθε λογικό αξίωμα ή μη λογικό αξίωμα είναι θεώρημα. Αν x,x->y (MODUS PONENS) δύο θεωρήματα τότε το y είναι θεώρημα.

Θεώρημα: |- $(\phi \to \phi)$.
Απόδειξη:
A1. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi))$
A2. $(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$
Από 1,2 και MP έχω $((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$
A1. $(\phi \to (\phi \to \phi))$
Από 3,4,MP έχω $(\phi \to \phi)$

θεώρημα 3.12 (Το θεώρημα της απαγωγής) *Αν $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ (γράφουμε και $T, \phi \vdash \psi$) τότε $T \vdash \phi \to \psi$.*

Απόδειξη:

Επαγωγή: Στο μέγεθος της ακολουθίας. (για ν=1) Έστω ψ λογικό ή μη λογικό αξίωμα. Τότε

(1) A1. $(\psi \to (\phi \to \psi))$
(2) Από υπόθεση ψ.
(3) 1,2,MP $(\phi \to \psi)$

Αν $\psi \equiv \phi$ τότε αρκεί ν.δ.ο |- $(\phi \to \phi)$ (από προηγουμένως).

Έστω (x1,x2,…,xn) ακολουθία με $\psi \equiv xn$. Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:
ψ είναι λογικό ή μη λογικό αξίωμα ή $\psi \equiv \phi$. Τότε ομοίως με προηγουμένως.
Αν το ψ έχει προκύψει με MP τότε υπάρχουν xi, xj με i,j<n τ.ω $xj \equiv xi \to \psi$.
Τότε όμως T|- $(\phi \to xi)$ και T|- $(\phi \to (xi \to \psi))$ (από επαγωγική υπόθεση).
(1) Επαγωγική υπόθεση $(\phi \to xi)$
(2) Επαγωγική υπόθεση $(\phi \to (xi \to \psi))$
(3) A2 $((\phi \to (xi \to \psi)) \to ((\phi \to xi) \to (\phi \to \psi))$
(4) 2,3,MP $((\phi \to xi) \to (\phi \to \psi))$
(5) 1,4,MP $(\phi \to \psi)$

θεώρημα 3.13 (Θεώρημα της ορθότητας) *Αν $T \vdash \phi$ τότε $T \models \phi$. Στην ειδική περίπτωση που $T = \emptyset$, έχουμε ότι $\vdash \phi$ συνεπάγεται $\models \phi$ δηλαδή τα θεωρήματα του καθαρού προτασιακού λογισμού είναι ταυτολογίες.*

Απόδειξη: Απλή καθώς τα λογικά αξιώματα είναι ταυτολογίες και για κάθε V που ικανοποιεί το T, τότε ικανοποιεί και κάθε προτασιακό τύπο που προκύπτει από MP. Αν δεν υπάρχει V τότε επίσης T |=φ.

Λήμμα: (ali) |-φ τότε |- $\psi \to \phi$.
Proof:
(1) Υπόθεση φ
(2) A1 $\phi \to (\psi \to \phi)$
(3) 1,2,MP $\psi \to \phi$

Λήμμα: (syl) |- $\phi \to \psi$ και |- $\psi \to \chi$ τότε |- $\phi \to \chi$
Proof:
(1) Υπόθεση $\psi \to \chi$
(2) ali $\phi \to (\psi \to \chi)$
(3) A2,2 $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)$
(4) Υπόθεση $\phi \to \psi$
(5) 3,4,MP $\phi \to \chi$

Λήμμα: (com12) |- $\phi \to (\psi \to \chi)$ τότε |- $\psi \to (\phi \to \chi)$
Proof:
(1) Υπόθεση,Α2 $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi)$
(2) Α1 $\psi \to (\phi \to \psi)$
(3) 1,2,syl $\psi \to (\phi \to \chi)$

Λήμμα (sec edition axim3)
|- $(\neg y \to \neg \phi) \to (\phi \to y)$
Proof:
(1) A3 $(\neg y \to \neg \phi) \to ((\neg y \to \phi) \to y)$
(2) A1 $\phi \to (\neg y \to \phi)$
(3) ali,1 $\phi \to ((\neg y \to \neg \phi) \to ((\neg y \to \phi) \to y))$
(4) 3,com12 $(\neg y \to \neg \phi) \to (\phi \to ((\neg y \to \phi) \to y))$
(5) A2 $(\phi \to ((\neg y \to \phi) \to y)) \to ((\phi \to (\neg y \to \phi)) \to (\phi \to y))$
(6) 4,5,syl $(\neg y \to \neg \phi) \to ((\phi \to (\neg y \to \phi)) \to (\phi \to y))$
(7) 6,com12 $(\phi \to (\neg y \to \phi)) \to ((\neg y \to \neg \phi) \to (\phi \to y))$
(8) 7,2,MP $(\neg y \to \neg \phi) \to (\phi \to y)$

Παρατήρηση: Με deduction πολύ πιο μικρή απόδειξη (αποφεύγω τα com12).
Δηλαδή:
Αρκει $\{(\neg y \to \neg \phi)\}$|- $(\phi \to y)$
(1) A3 $(\neg y \to \neg \phi) \to ((\neg y \to \phi) \to y)$
(2) 1,MP $((\neg y \to \phi) \to y)$
(3) ali,2 $\phi \to ((\neg y \to \phi) \to y)$
(4) 3,A2 $(\phi \to (\neg y \to \phi)) \to (\phi \to y)$
(5) A1 $(\phi \to (\neg y \to \phi))$
(6) 4,5,MP $(\phi \to y)$

Λήμμα: Αν φ προτασιακός τύπος και για τη δημιουργία του χρησιμοποιήθηκαν οι προτασιακές μεταβλητές {B1,B2,…,Bk} τότε {B1',B2',…,Bk'}|-φ' όπου ανάλογα με την απονομή αλήθειας έχω B1'=B1 ή $\neg B1$ κλπ.

Απόδειξη:

Επαγωγή:

Αν φ προτασιακή μεταβλητή τότε φ=Bi και άρα B'|-φ'.
Αν $\phi \equiv \neg x$ τότε από Ε.Υ {B1',B2',…,Bk'}|-x'. Αν $x' \equiv \neg x$ τότε {B1',B2',…,Bk'}|-φ.
Αν $x' \equiv x$ τότε θ.δ.ο το ίδιο ισχύει για $(\neg(\neg x))$.
Βλέπε το site…

Αν $\phi \equiv x \to \psi$ τότε αν {B1',B2',…,Bk'}|-x' και {B1',B2',…,Bk'}|-ψ' έχω:

Αν x'=x και ψ'=ψ τότε

(1) Επαγωγική υπόθεση ψ
(2) A1 ψ->(x->ψ)
(3) 1,2,MP (x->ψ)
και άρα {B1',B2',…,Bk'}|-φ.

Αν x'=$\neg x$ και ψ'=ψ τότε
(1) Επαγωγική υπόθεση ψ
(2) A1 ψ->(x->ψ)
(3) 1,2,MP (x->ψ)
και άρα {B1',B2',…,Bk'}|-φ.

Αν x'=$\neg x$ και ψ'=$\neg\psi$ τότε
Από προηγούμενο θεώρημα αρκεί ν.δ.ο {B1',B2',…,Bk',x}|-ψ.

(1) Υπόθεση x
(2) Επαγωγική υπόθεση $\neg x$
(3) Επαγωγική υπόθεση $\neg\psi$
(4) A1 $((\neg x) \to ((\neg\psi) \to (\neg x)))$
(5) 2,4,MP $((\neg\psi) \to (\neg x))$
(6) A3 $((\neg\psi) \to (\neg x)) \to (((\neg\psi) \to x) \to \psi)$
(7) 5,6,MP $(((\neg\psi) \to x) \to \psi)$
(8) A1 x->($\neg\psi$ ->x)
(9) 1,8,MP ($\neg\psi$ ->x)
(10)7,9,MP ψ
και άρα {B1',B2',…,Bk'}|-ψ.

Αν x'=x και ψ'=$\neg\psi$ τότε
Βλέπε το site…

Λήμμα: Αν T|-φ->ψ και T|-$\neg\phi$->ψ τότε T|-ψ.

(1)nsyl4
|-(ϕ->ψ) και |-$\neg\phi$->x τότε |-$\neg x$->ψ. Άρα έχω ότι
(1) Υπόθεση (ϕ->ψ)
(2) Υπόθεση $\neg\phi$->ψ
(3) Nsyl4 $\neg\psi$->ψ
(4) A3 ($\neg\psi$->$\neg\psi$)->(($\neg\psi$->ψ)->ψ)
(5) Id,4 ($\neg\psi$->ψ)->ψ
(6) 3,5 ψ

Θεώρημα 3.14 (Θεώρημα της πληρότητας) *Αν $\models \phi$, δηλαδή αν ϕ είναι ταυτολογία, τότε $\vdash \phi$.*

Από τα προηγούμενα μετά από κ φορές εφαρμογή του παραπάνω λήματος (όπου κ το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών), διώχνοντας τες μία μία καταλήγουμε στο ότι |-φ.

Πόρισμα 3.15 *Εάν T θεωρία (T μπορεί να είναι άπειρο σύνολο) τότε $T \models \phi$ συνεπάγεται $T \vdash \phi$.*

Από θεώρημα συμπάγειας έπεται ότι T0|=φ με T0 πεπερασμένο σύνολο, έστω {B1,…,Bn}. Τότε $\models (B1 \to .....(Bn \to \phi))$. Όμως από προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\vdash (B1 \to .....(Bn \to \phi))$ και άρα εφαρμόζοντας n φορές MP έχω το ζητούμενο.