Παίγνια Συμφόρησης

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- Σύνολο πόρων $E = \{ e_1, \ldots, e_m \}$.
  - Πόροι: ακμές δικτύου, υπηρεσίες σε υπολογιστικό ή πληροφοριακό σύστημα, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
- n χρήστες με απαιτήσεις πρόσβασης σε πόρους.
  - Απαιτήσεις εισάγουν ίδιο (μοναδιαίο) φορτίο.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο επιλογών (αμιγών στρατηγικών) παίκτη i.
  - Παίκτης i κάνει επιλογή $\sigma_i \in \Sigma_i$.
  - Διάνυσμα επιλογών $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ διαμόρφωση συστήματος.
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

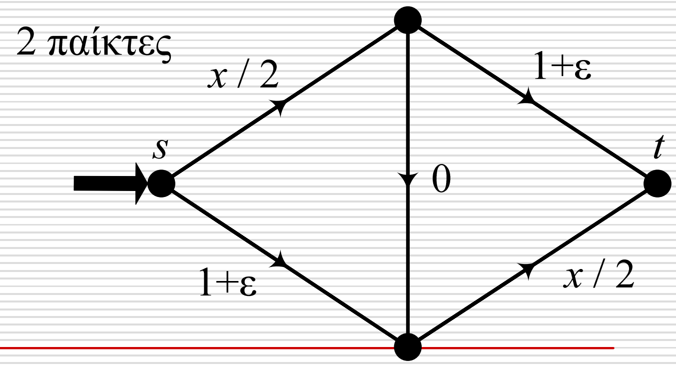
- «Ποιότητα» πόρου υποβαθμίζεται όσο αυξάνεται φορτίο.
  - Φορτίο (ή συμφόρηση) σ_e πόρου e σε διαμόρφωση σ.
    σ_e = #χρηστών που χρησιμοποιούν *e* στη σ.
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) πόρου e με συμφόρηση x: $d_e(x)$
  - Καθυστέρηση σε κάθε πόρο αυξάνεται με συμφόρηση!
- Καθυστέρηση παίκτη *i* σε διαμορφ. σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$
    $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- Μέτρο αποδοτικότητας διαμόρφωσης σ αποτελεί η συνολική καθυστέρηση των χρηστών:

$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$$

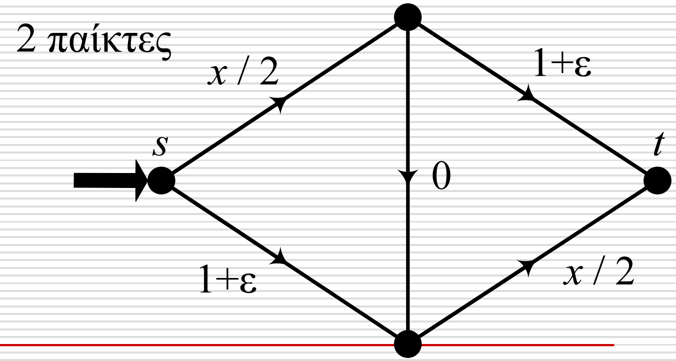
  - Βέλτιστη διαμόρφωση σ^* ελαχιστοποιεί συνολική καθυστέρηση.
  - Συστήματα μικρής κλίμακας με κεντρική διαχείριση (υπολογιστικά συστήματα με λίγους χρήστες), η βέλτιστη διαμόρφωση σ^* επιβάλλεται στους χρήστες.
  - Συνολική καθυστέρηση: έννοια «κοινωνικού» κόστους.



Παίγνια Συμφόρησης

- Παίγνιο συμφόρησης $\Gamma(N, E, (\Sigma_i)_{i \in N}, (d_e)_{e \in E})$
  - N : σύνολο n χρηστών (ανταγωνιστικών οντοτήτων)
  - E : σύνολο m πόρων διαμοιραζόμενων από χρήστες.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο αμιγών στρατηγικών χρήστη i.
    - $\Sigma_i = \Sigma_j$, $\forall i, j$: συμμετρικό παίγνιο.
    - Σύνολο στρατηγικών (διαμορφώσεων) $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$
    - σ_i συμβολίζει στρατηγική χρήστη i σε διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$.
  - Διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$ προκαλεί συμφόρηση σ_e σε πόρο $e \in \Sigma$.
    σ_e = #χρηστών που χρησιμοποιούν e στη σ:
    $$\sigma_e = |\{i \in N : e \in \sigma_i\}|$$
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους)
    σε πόρο e : $d_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+$

Παίγνια Συμφόρησης



- Χρήστες ενδιαφέρονται για καθυστέρηση στρατηγικής τους δεδομένων στρατηγικών υπολοίπων χρηστών.
  - σ^{-i} : διαμόρφωση από στρατηγικές χρηστών εκτός του i.
  - Κόστος χρήστη i σε διαμόρφωση σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Κόστος στρατηγικής $p \in \Sigma_i$ (χρήστη i) σε διαμόρφωση σ^{-i}:

    $$c_i(\sigma^{-i}, p) = \sum_{e \in p} d_e(\sigma_e^{-i} + 1)$$

  - **Βέλτιστη απόκριση** χρήστη i σε διαμόρφωση σ^{-i}: στρατηγική $p^*(\sigma^{-i}) \in \Sigma_i$ με ελάχιστο κόστος.
- Διαμόρφωση σ είναι αμιγής ισορροπία Nash αν
  - $\forall$χρήστη i, σ_i αποτελεί βέλτιστη απόκριση σε σ^{-i}.
  - Κανένας χρήστης δεν μπορεί να μειώσει την ατομική του καθυστέρηση αλλάζοντας τη στρατηγική του.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

- Παίγνια συμφόρησης: γενικό μοντέλο – πλήθος εφαρμογών!
  - Πόροι: συνδέσεις δικτύου, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
  - Στρατηγικές: Σύνολα πόρων για ικανοποίηση στόχου.
- Παραδείγματα:
  - $n = 2$, δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = x / 2$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
  - Δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = (x/n)^k$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
  - $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, $n = 3$.
$\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_2\} \}$
$\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\} \}$
$\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\} \}$
$\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$
    - Ισορροπίες: $(\{s_1, p_1\}, \{s_2, p_2\}, \{s_3, p_3\})$
$(\{s_2, s_3, p_2\}, \{s_3, s_1, p_3\}, \{s_1, s_2, p_1\})$

Ερευνητικές Κατευθύνσεις

- Ύπαρξη και δομή αμιγών ισορροπιών Nash για παίγνια συμφόρησης και γενικεύσεις τους.
- Ταχύτητα σύγκλισης σε αμιγείς ισορροπίες Nash.
  - Υπό ποιες προϋποθέσεις (π.χ. συντονισμός, γνώση, υπολογιστικοί πόροι) χρήστες συγκλίνουν γρήγορα σε ισορροπία Nash;
- Ποιότητα – απόδοση ισορροπιών Nash σε σχέση με βέλτιστη λύση.
  - Τίμημα αναρχίας, κόστος σταθερότητας.
  - Μέθοδοι βελτίωσης κόστους αναρχίας: διόδια, πολιτικές Stackelberg, …
- Αντίστοιχα ερωτήματα για μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης βλ. [Roughgarden], [Vocking].

Συνάρτηση Δυναμικού

- «Κοινωνικό» κόστος χρηστών: $C(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$
- Ιδιοτελής συμπεριφορά μειώνει συνάρτηση δυναμικού:
  $$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{\sigma_e} d_e(j)$$
  - Όταν χρήστης *i* αλλάζει στρατηγική από *p* σε *p'*, τότε:
    $$c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p') = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$
    δηλ. μεταβολή κόστους χρήστη *i* = μεταβολή δυναμικού.
  - Ονομάζονται (ακριβείς) συναρτήσεις δυναμικού.
- σ (αμιγής) ισορροπία Nash ανν
  σ αποτελεί τοπικό ελάχιστο Φ [Rosenthal, 73].
  - Πολιτική **καλύτερων / βέλτιστων αποκρίσεων** οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.
  - Υπολογισμός ισορροπίας Nash ελαχιστοποιώντας δυναμικό.

Συνάρτηση Δυναμικού

- Ανταγωνιστικό παίγνιο με ακριβή συνάρτηση δυναμικού είναι ισομορφικό με κάποιο παίγνιο συμφόρησης [Monderer and Shapley, 96].
- Τι συμβαίνει όταν οι χρήστες έχουν διαφορετικά βάρη;
  - Χρήστες επιβαρύνουν διαφορετικά πόρους (αλλά όλους με ίδιο τρόπο / βάρος).
  - Βάρη χρηστών: $w_1, \ldots, w_n$
  - Φορτίο πόρου *e* σε διαμόρφωση σ: $\sigma_e = \sum_{i:e\in\sigma_i} w_i$
  - [Milchtaich, 96], [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04], …

Παίγνια Συμφόρησης με Βάρη

- Για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, $d_e(x) = a_e x + b_e$ υπάρχει συνάρτηση δυναμικού που λαμβάνει υπόψη τα βάρη [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2}\sum_{e\in E}\left(a_e\sigma_e^2 + 2b_e\sigma_e + a_e\sum_{i:e\in\sigma_i} w_i^2\right)$$

  - Όταν χρήστης *i* αλλάζει στρατηγική από *p* σε *p′*, τότε:

$$w_i[c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p')] = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

    (βάρος *i*) x (μεταβολή κόστους *i*) = μεταβολή δυναμικού.
  - Συνάρτηση δυναμικού με βάρη: γενικεύει Rosenthal.
- Για μη-γραμμικές συναρτήσεις, δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και μπορεί ούτε αμιγής ισορροπία Nash [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

Δυναμικά και Ύπαρξη PNE

- Τι συμβαίνει όταν κάθε χρήστης βιώνει διαφορετική καθυστέρηση στον ίδιο πόρο (player-specific payoffs);
  - [Milchtaich, 96], [Monien et al], [Monderer, 06], …
- Υπάρχουν προσεγγιστικές συναρτήσεις δυναμικού για παίκτες με βάρη και πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους;
- Strategy spaces που εγγυώνται ύπαρξη αμιγών ισορροπιών Nash ανεξάρτητα από συναρτήσεις κόστους;
  - Topological existence property [Monderer, 06].
- Τι συμβαίνει με συνασπισμούς χρηστών;
  - Συνασπισμός έχει βάρος (#χρηστών) που «σπάει» σε μοναδιαίους χρήστες.
  - [Hayrapetyan, Tardos, Wexler, 06], [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 06], [Monderer, 07], …

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Γενικά, μείωση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία μπορεί να είναι πολύ αργή (π.χ. εκθετικός #βημάτων).
- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε προσεγγιστική ισορροπία για συμμετρικά παίγνια με α-bounded jump,

$$\forall e \in E, \forall x \geq 1,\ d_e(x+1) \leq \alpha d_e(x)$$

  - [Chien and Sinclair, 07].
  - Επέκταση για ετερογενείς συνασπισμούς χρηστών και γραμμικές συναρτήσεις [Fotakis, Sarigiannidis, Spirakis, 07].
- Διαμόρφωση σ είναι ε-ισορροπία αν

$$\forall i \in N, \forall p \in \Sigma_i,\ (1-\varepsilon) c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, p)$$

  - δεν υπάρχει χρήστης με δυνατότητα σημαντικής βελτίωσης.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- $\Phi(\sigma) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) \leq n c_k(\sigma)$ όπου *k* ο χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
- Ενόσω σ όχι ε-ισορροπία, κινείται «ανικανοποίητος» χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
  - Αν *k* «ανικανοποίητος», μείωση δυναμικού κατά:
    $\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma') = c_k(\sigma) - c_k(\sigma') > \varepsilon c_k(\sigma) \geq \frac{\varepsilon}{n}\Phi(\sigma)$
  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
  - Αν *k* «ικανοποιημένος» και κινείται χρήστης *j*, τότε λόγω συμμετρίας και α-bounded jump: $c_k(\sigma)/\alpha \leq c_j(\sigma)$
  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n\alpha}{\varepsilon} \log \Phi(\sigma_0)$
- Παρόμοια αποτελέσματα και για άλλα κριτήρια συντονισμού.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε ακριβείς ισορροπίες για συμμετρικά παίγνια με απλές τοπολογίες.
  - Series-parallel graphs [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 05].
  - Παράλληλοι πόροι και matroids (και για μη-συμμετρικά παίγνια) [Ackerman, Roglin, Vocking, 06].
  - Extension-parallel graphs [Fotakis, 07].
- Τι συμβαίνει σε γραμμικά παίγνια συμφόρησης με βάρη (υπάρχει δυναμικό, δεν υπάρχει συμμετρία);
- Τι συμβαίνει σε μη-γραμμικά παίγνια συμφόρησης με συνασπισμούς χρηστών ή με βάρη;

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Αν δεν υπάρχει συντονισμός ή / και συνολική γνώση;
  - Ταυτόχρονες μυωπικές κινήσεις χρηστών χωρίς συντονισμό.
  - Πρωτόκολλα που εξασφαλίζουν γρήγορη σύγκλιση.
  - Τυχαιότητα για σπάσιμο συμμετρίας.
  - [Fischer and Vocking] για μη-ατομικά παίγνια.
  - [Even-Dar and Mansour, 05] και [Berenbrink et al, 06] για παράλληλους πόρους και γραμμικές συναρτήσεις.
  - [Fotakis, Kaporis, Spirakis, 07] για παράλληλους πόρους και α-bounded jump συναρτήσεις.