



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

### Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων (επιλεγμένα θέματα)

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 23/6/2011

---

**Θέμα 1 (3 μον.).** (α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα του υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε γενικά παίγνια 2 παικτών (bimatrix games) ανάγεται πολυωνυμικά στο πρόβλημα του υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος 3 παικτών (3-player zero-sum games).

(β) Ένα παίγνιο 2 παικτών είναι *συμμετρικό* (symmetrix bimatrix game) αν ο πίνακας ωφέλειας του ενός παίκτη είναι ο ανάστροφος του πίνακα ωφέλειας του άλλου παίκτη (δηλ.  $C = R^T$ ). Να δείξετε ότι το πρόβλημα του υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε παίγνια 2 παικτών ανάγεται πολυωνυμικά στο πρόβλημα του υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε συμμετρικά παίγνια 2 παικτών.

**Θέμα 2 (1.5 μον.).** Ένα παίγνιο 2 παικτών, με  $n$  στρατηγικές ο καθένας, ορίζεται από  $2n^2$  αριθμούς που αντιπροσωπεύουν το κέρδος κάθε παίκτη για τους  $n^2$  συνδυασμούς των στρατηγικών τους. Θεωρούμε ένα τυχαίο παίγνιο 2 παικτών, όπου αυτοί οι  $2n^2$  αριθμοί επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα στο διάστημα  $[0, 1]$ . Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένα τέτοιο παίγνιο να έχει αμιγή ισορροπία Nash (pure Nash equilibrium).

**Θέμα 3 (2 μον.).** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ντετερμινιστικός φιλαλήθης (strategyproof) μηχανισμός για το πρόβλημα του 2-Facility Location με λόγο προσέγγισης μικρότερο του  $2 - \varepsilon$ , για κάθε σταθερά  $\varepsilon > 0$ .

**Θέμα 4 (1.5 μον.).** Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίζει  $C$  ευρώ. Κάθε δημότης  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε  $v_i \geq 0$  ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο (private information). Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους  $v_1, \dots, v_n$ , και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν  $\sum_{i=1}^n v_i \geq C$ . Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά  $p_i \geq 0$ . Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

**Θέμα 5 (2 μον.).** Άσκηση 11.9, σελ. 229, του βιβλίου [AGT].