Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων (επιλεγμένα θέματα)

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 19/5/2011

Θέμα 1 (20 μονάδες). Να υπολογίσετε ένα ακριβές άνω φράγμα στο Τίμημα της Αναρχίας για μη ατομικά παίγνια συμφόρησης με πολυωνυμικές συναρτήσεις καθυστέρησης βαθμού $p \geq 1$ (δηλ. οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι της μορφής $d_e(x) = a_{e,p}x^p + a_{e,p-1}x^{p-1} + \ldots + a_{e,1}x + a_{e,0}$, με $a_{e,p}, a_{e,p-1}, \ldots, a_{e,1}, a_{e,0} \geq 0$). Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου για το οποίο το Τίμημα της Αναρχίας είναι ίσο με το άνω φράγμα που υπολογίσατε. Ποιο είναι το Τίμημα της Αναρχίας για $p = 2, 3, 4$; Ποια είναι η τάξη μεγέθους του Τιμήματος της Αναρχίας για μεγάλες τιμές του p;

Θέμα 2 (20 μονάδες). Σε ένα (ατομικό) παίγνιο συμφόρησης με παίκτες διαφορετικού βάρους (ή χάριν συντομίας, παίγνιο συμφόρησης με βάρη), κάθε παίκτης $i \in [n]$ έχει βάρος $w_i > 0$. Ο ορισμός των παιγνίων συμφόρησης με βάρη είναι απολύτως αντίστοιχος με αυτόν των παιγνίων συμφόρησης με παίκτες μοναδιαίου βάρους, με μόνη διαφορά ότι η συμφόρηση σ_e κάθε ακμής e σε μια διαμόρφωση σ είναι ίση με το *συνολικό βάρος* των παικτών που διέρχονται από την e, δηλ., $\sigma_e = \sum_{i:e\in\sigma_i} w_i$. Κατά τα άλλα, η καθυστέρηση σε κάθε ακμή e είναι $d_e(\sigma_e)$ και το ατομικό κόστος κάθε παίκτη i στην σ είναι $c_i(\sigma) = \sum_{e\in\sigma_i} d_e(\sigma_e)$.

(α) Να δείξετε ότι κάθε παίγνιο συμφόρησης με βάρη και εκθετικές συναρτήσεις καθυστέρησης $d_e(x) = a^x$, για κάποιο (ίδιο για όλες τις ακμές) $a > 1$, έχει βεβαρημένη συνάρτηση δυναμικού (weighted potential function).

(β) Να δώσετε παράδειγμα παιγνίου συμφόρησης με βάρη το οποίο δεν έχει αμιγή ισορροπία Nash. Μπορεί ένα τέτοιο παίγνιο να έχει συνάρτηση δυναμικού;

Θέμα 3 (20 μονάδες). Θεωρούμε παίγνιο όπου $n \geq 2$ παίκτες μοιράζονται το εύρος ζώνης μιας δικτυακής σύνδεσης. Το διαθέσιμο εύρος ζώνης είναι 1 και κάθε παίκτης i χρησιμοποιεί εύρος ζώνης $x_i \in [0, 1]$ (δηλ. το x_i είναι η στρατηγική του παίκτη). Το όφελος του παίκτη i στη διαμόρφωση $x = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι $u_i(x) = x_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right)$.

(α) Έχει αυτό το παίγνιο (αμιγή) ισορροπία Nash; Αν ναι, να περιγράψετε μία ισορροπία Nash και να διερευνήσετε αν αυτή είναι μοναδική.

(β) Να διερευνήσετε αν αυτό το παίγνιο έχει ακριβή συνάρτηση δυναμικού (exact potential function).

Θέμα 4 (20 μονάδες). Θεωρούμε ένα (ατομικό) παίγνιο συμφόρησης με παίκτες διαφορετικού βάρους όπου οι στρατηγικές των παικτών αποτελούνται από μία μόνο ακμή[1], και όπου τα σύνολα στρατηγικών μπορεί να διαφέρουν για κάθε παίκτη, δηλ. διαφορετικοί παίκτες i, j μπορεί να επιλέγουν ακμή από διαφορετικά σύνολα E_i, E_j.

(α) Να δείξετε ότι ένα τέτοιο παίγνιο έχει το Finite Improvement Property, δηλ. ότι κάθε ακολουθία "κινήσεων" όπου ένας παίκτης μεταβάλει τη στρατηγική του και βελτιώνει το ατομικό του κόστος είναι

---

[1] Τέτοια παίγνια είναι γνωστά και ως παίγνια εξισορρόπησης φορτίου (load balancing games) ή ως παίγνια παράλληλων ακμών (parallel-link games), αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε παίκτης i αναθέτει το φορτίο του σε μια ακμή που επιλέγεται ένα σύνολο "παράλληλων" ακμών E_i (το οποίο μπορεί να είναι διαφορετικό για κάθε παίκτη).

πεπερασμένη. *Υπόδειξη:* Μπορείτε αρχικά να υποθέσετε ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης $d_e(x)$ είναι γνήσια αύξουσες, και στη συνέχεια να δείξετε ότι αυτή η υπόθεση δεν είναι αναγκαία.

(β) Σύμφωνα με το Λήμμα 2.5 στην εργασία των Monderer και Shapley, ένα παίγνιο έχει την Finite Improvement Property αν και μόνο αν έχει generalized ordinal potential function. Να διατυπώσετε μια τέτοια συνάρτηση δυναμικού για αυτή την κλάση παιγνίων συμφόρησης.

Θέμα 5 (20 + 10 μονάδες). Μια απλή μέθοδος για τον υπολογισμό μιας αμιγούς ισορροπίας Nash σε (ατομικά) δικτυακά παίγνια συμφόρησης με συμμετρικά σύνολα στρατηγικών (όπου δηλ. όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια αφετηρία s και τον ίδιο προορισμό t) είναι η *αυξητική μέθοδος*: Δεδομένης μιας αρίθμησης των παικτών, οι παίκτες "εισέρχονται στο δίκτυο" με βάση τον αύξοντα αριθμό τους, και επιλέγουν αμετάκλητα τη βέλτιστη στρατηγική τους, δεδομένων των στρατηγικών των προηγουμένων παικτών. Δηλ. κάθε παίκτης $i \geq 1$ "εισέρχεται στο δίκτυο" μετά τους παίκτες $1, \ldots, i-1$, και επιλέγει (αμετάκλητα) το συντομότερο $s-t$ μονοπάτι με βάση τις καθυστερήσεις που διαμορφώνονται από τις στρατηγικές των παικτών $1, \ldots, i-1$ και από τη δική του κυκλοφορία. Αν για κάθε $i = 2, \ldots, n$, οι στρατηγικές των παικτών $1, \ldots, i-1$ παραμένουν βέλτιστες και μετά την "είσοδο" του παίκτη i στο δίκτυο, τότε η αυξητική μέθοδος οδηγεί (μετά την είσοδο και του n-οστού παίκτη) σε μια αμιγή ισορροπία Nash.

(α) Να δώσετε παράδειγμα συμμετρικού δικτυακού παιγνίου συμφόρησης (όπου όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο βάρος και το ίδιο σύνολο στρατηγικών) στο οποίο η αυξητική μέθοδος δεν οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.

(β) Να δείξετε ότι η αυξητική μέθοδος οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash σε $s-t$-δίκτυα παράλληλων ακμών όταν όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών (δηλ. όλες οι διαθέσιμες ακμές είναι επιλέξιμες από όλους τους παίκτες) και διαφορετικά βάρη, και "εισέρχονται στο δίκτυο" σε φθίνουσα σειρά βάρους.

(γ) Να δείξετε ότι η αυξητική μέθοδος οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash σε $s-t$-σειριακά-παράλληλα δίκτυα ($s-t$-series-parallel networks[2]) όταν όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών και το ίδιο βάρος. Αυτό το ερώτημα δίνει τις 10 μονάδες bonus!

[2] Ένα $s-t$-δίκτυο είναι $s-t$-*σειριακό-παράλληλο* αν είτε αποτελείται από μια μόνο ακμή (s,t) είτε προκύπτει από τη σύνθεση δύο σειριακών-παράλληλων δικτύων με τερματικούς κόμβους $s_1 - t_1$ και $s_2 - t_2$ είτε *παράλληλα* είτε *σε σειρά*. Στη σύνθεση σε σειρά, τα t_1 και s_2 ταυτίζονται σε έναν κόμβο, το s_1 γίνεται s, και το t_2 γίνεται t. Στην παράλληλη σύνθεση, τα s_1 και s_2 ταυτίζονται σε έναν κόμβο, τον s, και τα t_1 και t_2 ταυτίζονται σε έναν κόμβο, τον t. Αποδεικνύεται ότι ένα δίκτυο είναι $s-t$-σειριακό-παράλληλο αν και μόνο αν δεν περιέχει ως topological minor το θ-γράφημα (δίκτυο του Braess) με τις κορυφές βαθμού 2 να αντιστοιχούνται στους τερματικούς κόμβους s και t.