Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων (επιλεγμένα θέματα)

Μεταπτυχιακό ΣΗΜΜΥ, ΣΕΜΦΕ, ΜΠΛΑ

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, Δ. Φωτάκης

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 11/4/2011

Θέμα 1 (12 μονάδες). Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π1):

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - x_2 - 7x_3 + x_4 = -3 \\ & 3x_1 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ & x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Να σχεδιάσετε το σύνολο των εφικτών λύσεων του (Π1) και να βρείτε τις κορυφές του (ίσως χρειαστεί να το τροποποιήσετε κατάλληλα). Να σχεδιάσετε την κατεύθυνση βελτιστοποίησης, και να βρείτε μια βέλτιστη λύση.
2. Να διατυπώσετε το δυϊκό πρόγραμμα (ΔΠ1) του (Π1). Να διατυπώσετε τις complementary slackness συνθήκες για τα (Π1) και (ΔΠ1), και να τις χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του (ΔΠ1).

Θέμα 2 (12 μονάδες). Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα (Π2):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Να λύσετε το (Π2) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Simplex. Να περιγράψετε τις εναλλαγές στηλών (pivots) που κάνει ο αλγόριθμος για να οδηγηθεί στη βέλτιστη λύση.
2. Να διατυπώσετε το δυϊκό πρόγραμμα (ΔΠ2) του (Π2). Να διατυπώσετε τις complementary slackness συνθήκες για τα (Π2) και (ΔΠ2), και να τις χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης του (ΔΠ2).
3. Τι συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε τον πρώτο περιορισμό του (Π2) με τον περιορισμό $x_1 + 2x_2 \leq -2$;

Θέμα 3 (16 μονάδες). Να διατυπώσετε τα παρακάτω προβλήματα ως προβλήματα Ακεραίου Γραμμικού Προγραμματισμού:

Κάλυμμα Συνόλων (Set Cover). Θεωρούμε ένα σύνολο U και μια οικογένεια $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ υποσυνόλων του U. Κάθε υποσύνολο $X_j \in \mathcal{X}$ έχει ένα βάρος w_j. Το ζητούμενο είναι η επιλογή μιας συλλογής $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ ελάχιστου συνολικού βάρος, η ένωση των στοιχείων της οποίας είναι δίνει το U.

Δέντρο Steiner (Steiner Tree). Θεωρούμε ένα πλήρες μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με μήκη $\ell(e)$ στις ακμές, μια διακεκριμένη κορυφή $r \in V$, και ένα υποσύνολο κορυφών $T \subseteq V \setminus \{r\}$. Υποθέτουμε ότι τα μήκη των ακμών ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, δηλ. για κάθε $x, y, z \in V$, ισχύει ότι $\ell(x, y) \leq \ell(x, z) + \ell(z, y)$. Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός ενός υπογραφήματος του G που έχει ελάχιστο συνολικό μήκος και συνδέει όλες τις κορυφές του T με την r.

Χωροθέτηση Υπηρεσιών (Facility Location). Θεωρούμε ένα σύνολο C με n πελάτες, και ένα σύνολο F με m πιθανές θέσεις εγκατάστασης μιας υπηρεσίας. Για κάθε θέση $j \in F$, δίνεται το κόστος f_j για την εγκατάσταση της υπηρεσίας στη θέση j. Για κάθε $i \in C$ και $j \in F$, δίνεται το κόστος $d(i, j)$ για τη σύνδεση του πελάτη i στη θέση j. Το συνολικό κόστος για ένα σύνολο θέσεων $F' \subseteq F$ όπου εγκαθίσταται η υπηρεσία είναι ίσο με το άθροισμα του συνολικού κόστους εγκατάστασης για τις θέσεις του F' και του συνολικού κόστους σύνδεσης κάθε πελάτη στην πλησιέστερη θέση του F'. Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός ενός συνόλου $F' \subseteq F$ όπου θα εγκατασταθεί η υπηρεσία για το οποίο το συνολικό κόστος είναι ελάχιστο.

Στη συνέχεια, να διατυπώσετε τα αντίστοιχα Γραμμικά Προγράμματα, αντικαθιστώντας τους περιορισμούς ακεραιότητας με περιορισμούς μη αρνητικότητας, και να γράψετε τα δυϊκά τους. Δοκιμάστε να αποδώσετε τη φυσική σημασία των δυϊκών.

Θέμα 4 (30+5 μονάδες). Δίνεται το (μη γραμμικό) πρόγραμμα:

$$R = \min\{\tfrac{c_1^T x + d_1}{c_2^T x + d_2} : Ax \leq b, c_2^T x + d_2 > 0\}$$

Υποθέτουμε ότι η περιοχή των εφικτών λύσεων είναι φραγμένη και ότι η αντικειμενική τιμή της βέλτιστης λύσης ανήκει στο διάστημα $[L, U]$.

1. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε εφικτή λύση x, $c_2^T x + d_2 \geq \delta$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να υπολογίσουμε μια $(1+\varepsilon)$-προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του R (χρησιμοποιήστε ως υπορουτίνα έναν αλγόριθμο Γραμμικού Προγραμματισμού). Ποια είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας;
2. Να λύσετε το R όπως στο (1), αλλά χωρίς την υπόθεση σχετικά με την ύπαρξη του δ. Τώρα γνωρίζουμε μόνο ότι $c_2^T x + d_2 > 0$.
3. Να διατυπώσετε έναν (αποδοτικό) αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός άνω φράγματος U στη βέλτιστη αντικειμενική τιμή του R. Αν σας φάνηκε εύκολο, δοκιμάστε να διατυπώσετε έναν (αποδοτικό) αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός κάτω φράγματος L στη βέλτιστη αντικειμενική τιμή του R (το κάτω φράγμα δίνει τις 5 μονάδες bonus!).

Θέμα 5 (15 μονάδες). Έστω A ένας πίνακας $m \times n$, x ένα n-διάνυσμα μεταβλητών, και b ένα m-διάνυσμα. Το σύστημα γραμμικών ανισοτήτων $Ax \leq b$ καλείται *μη-συμβιβαστό* αν υπάρχει m-διάνυσμα y τέτοιο ώστε $A^T y = 0$, $b^T y < 0$, και $y \geq 0$. Να αποδείξετε ότι το σύστημα $Ax \leq b$ είναι *μη-επιλύσιμο* (δηλ. δεν υπάρχει x που να το ικανοποιεί) αν και μόνο αν είναι *μη-συμβιβαστό*.

Θέμα 6 (15+5 μονάδες). Έστω το Γραμμικό Πρόγραμμα $P = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, και το δυϊκό του $D = \max\{b^T y : A^T y \leq c\}$. Να δείξετε ότι αν η βέλτιστη λύση του P είναι μοναδική και non-degenerate, τότε η βέλτιστη λύση του D είναι μοναδική και non-degenerate (θα σας βοηθήσει η απόδειξη της ισχυρής δυϊκότητας που δείξαμε στο μάθημα – η απόδειξη ότι η βέλτιστη λύση του D είναι non-degenerate δίνει τις 5 μονάδες bonus!). Να δώσετε ένα παράδειγμα όπου το πρωτεύον Γραμμικό Πρόγραμμα έχει μια degenerate βασική εφικτή λύση, και το δυϊκό έχει μοναδική βέλτιστη λύση.