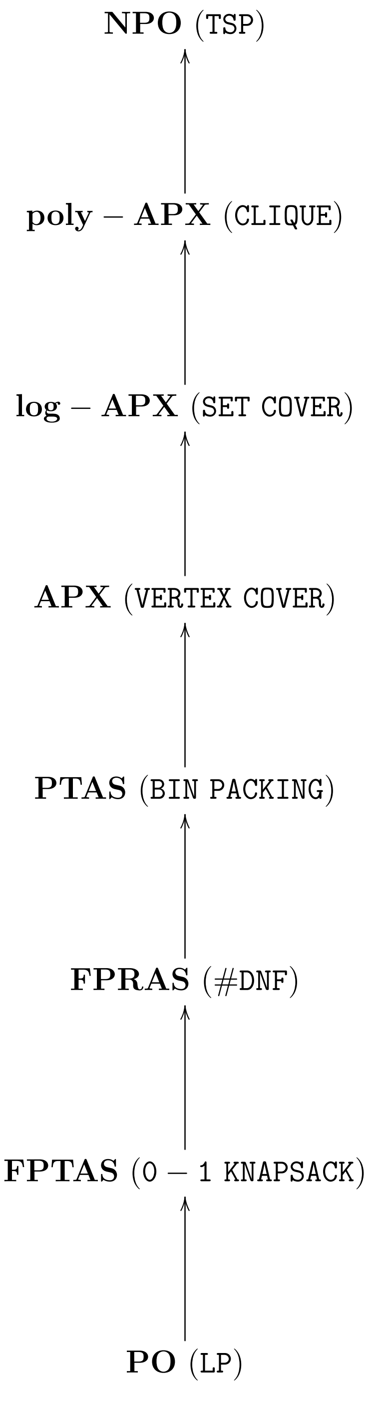


Σχήμα 31.1: Κλάσεις Προβλημάτων βελτιστοποίησης

Κεφάλαιο 32

Πολυπλοκότητα Αναζήτησης

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με κλάσεις γλωσσών, όπως η **NP**, και κλάσεις συναρτήσεων, όπως η **FP**. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με κλάσεις προβλημάτων αναζήτησης, στα οποία δεν διαπιστώνουμε μόνο αν υπάρχει κάποια λύση, αλλά ζητάμε και να βρεθεί. Αρχικά, ορίζουμε το συναρτησιακό ανάλογο της κλάσης **NP**, την **FNP**:

Ορισμός 32.1 **FNP** *είναι η κλάση των μερικών πλειότιμων (partial multivalued) συναρτήσεων που υπολογίζονται από μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου, τέτοια ώστε το δέντρο υπολογισμού, για είσοδο x, έχει στα φύλλα είτε ? είτε το πιστοποιητικό y του μονοπατιού που ικανοποιεί το αντίστοιχο κατηγόρημα $R(x, y)$.*

Το μη-ντετερμινιστικό μοντέλο, όμως, δημιουργεί προβλήματα στον ορισμό κλάσεων συναρτήσεων, λόγω του ότι για μία δεδομένη είσοδο $x \in \Sigma^*$ δεν υπάρχει μοναδική συμβολοσειρά εξόδου. Η προσπάθεια να αντιμετωπιστεί αυτό το ζήτημα, οδήγησε στον ορισμό των ακόλουθων κλάσεων:

- **NPMV**: *Η κλάση των μερικών πλειότιμων συναρτήσεων που υπολογίζονται από μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing πολυωνυμικού χρόνου, τέτοια ώστε το δέντρο υπολογισμού, για είσοδο x, έχει στα φύλλα είτε ? είτε κάποιες από τις δυνατές απαντήσεις της μηχανής Turing.*

- **NPSV**: *Η κλάση που περιλαμβάνει μονότιμες* **NPMV** *συναρτήσεις.*

Όλες οι κλάσεις που θα δούμε στην συνέχεια του κεφαλαίου είναι υποσύνολα της κλάσης **TFNP**, όπου το 'T' δηλώνει ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι ολικές (total), δηλαδή πάντα υπάρχει τουλάχιστον μία λύση. Η ύπαρξη λύσης για κάθε τέτοια κλάση οφείλεται σε *υπαρξιακές* αποδείξεις κάποιων ιδιοτήτων (συνήθως γραφοθεωρητικών).

Ζητάμε λοιπόν, για μια είσοδο $x \in \Sigma^*$, ένα y τέτοιο ώστε $R_\Pi(x,y)$, όπου R_Π είναι ένα πολυωνυμικά υπολογίσιμο και ισορροπημένο κατηγόρημα για κάποιο πρόβλημα Π. Όταν το πρόβλημα ανήκει στην κλάση **TFNP** γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο y.

Ορισμός 32.2 *Ένα πρόβλημα αναζήτησης* Π *αποτελείται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων (instances), και κάθε στιγμιότυπο* I *έχει ένα σύνολο* $Sol(I)$ *λύσεων. Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου, ζητείται ο υπολογισμός μιας λύσης. Ένα πρόβλημα αναζήτησης είναι ολικό αν* $Sol(I) \neq \emptyset$, *για κάθε στιμιότυπο* I.

Ορισμός 32.3

- ***Στιγμιότυπο*** *ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται ένα ζεύγος* (S, f), *όπου* S *ένα αριθμήσιμο* ***σύνολο λύσεων*** *και* $f : S \to \mathrm{IR}$ *μια συνάρτηση κόστους.*
- *Ένα* ***πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης*** Π, *ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης η ελαχιστοποίησης.*
- *Δεδομένου ενός στιγμιοτύπου* (S, f) *ενός προβλήματος* Π *το ζητούμενο είναι μια λύση* $s^* \in S$ *που να αποτελεί καθολικό βέλτιστο. Δηλαδή, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης πρέπει* $f(s^*) \leq f(s)$ *για κάθε* $s \in S$. *Αντίστροφα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.*

32.1 Προβλήματα Τοπικής Αναζήτησης

Οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης εκμεταλλεύονται την *γειτονική* δομή των εφικτών λύσεων. Δύο λύσεις είναι γειτονικές αν μπορούμε να μεταβούμε από την μία στην άλλη με μία απλή αλλαγή (alternation).

- Μελετάμε αλγορίθμους «**τοπικής αναζήτησης**» για να λύσουμε προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.
- Κάθε αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια **συνάρτηση γειτνίασης** που για κάθε λύση ορίζει τις γειτονικές της.

Ορισμός 32.4

- ***Συνάρτηση γειτνίασης*** N *ενός στιγμιότυπου* (S, f), *είναι μια συνάρτηση* $N : S \to 2^S$. *Για κάθε λύση* $s \in S$ *η* N *ορίζει ένα σύνολο* $N(s) \subseteq S$ *που ονομάζεται* ***γειτονιά*** *του* s.

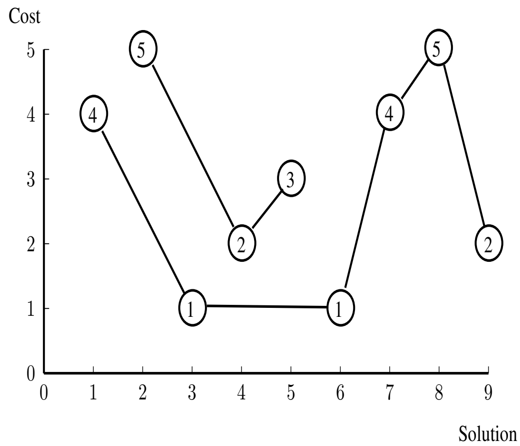
- *Έτσι, μια λύση s' είναι **γειτονική** της λύσης s ανν $s' \in S$.*
- *Ο πληθάριθμος του $N(s)$ ονομάζεται **μέγεθος της γειτονιάς** του s.*
- *Μια συνάρτηση γειτνίασης ονομάζεται **συμμετρική** όταν $s' \in N(s)$ ανν $s \in N(s')$*

Ορισμός 32.5 *Ο **γράφος γειτνίασης** ενός στιγμιότυπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης N, είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ όπου:*

- *Το σύνολο των κόμβων, V, δίνεται από το σύνολο των λύσεων (S).*
- *Το σύνολο των ακμών E ορίζεται έτσι ώστε $(i, j) \in E$ ανν $j \in N(i)$.*
- *Τέλος, ορίζουμε το βάρος του κάθε κόμβου ως το κόστος της λύσης στην οποία αντιστοιχεί.*

Έτσι, η εκτέλεση ενός αλγορίθμου τοπικής αναζήτησης σε ένα στιγμιότυπο, με μια συνάρτηση γειτνίασης, μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένας περίπατος πάνω στον αντίστοιχο γράφο γειτνίασης.

Παράδειγμα 32.1



Λύση	$f(s)$	$N(s)$
1	*4*	*{3}*
2	*5*	*{4}*
3	*1*	*{1,6}*
4	*2*	*{2,5}*
5	*3*	*{4}*
6	*1*	*{3,7}*
7	*4*	*{6,8}*
8	*5*	*{7,9}*
9	*2*	*{9}*

32.1.1 Επαναληπτική βελτίωση

- Όπως είδαμε, κάθε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης είναι ένας περίπατος πάνω στον γράφο γειτνίασης.
- Η πιο προφανής στρατηγική είναι ένας αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης hill climbing.
- Σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος αναζητά στη γειτονιά της τρέχουσας λύσης για μια λύση με καλύτερο κόστος.

- Ο αλγόριθμος που διαλέγει κάθε φορά την γειτονική λύση με το καλύτερο κόστος, ονομάζεται αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης.

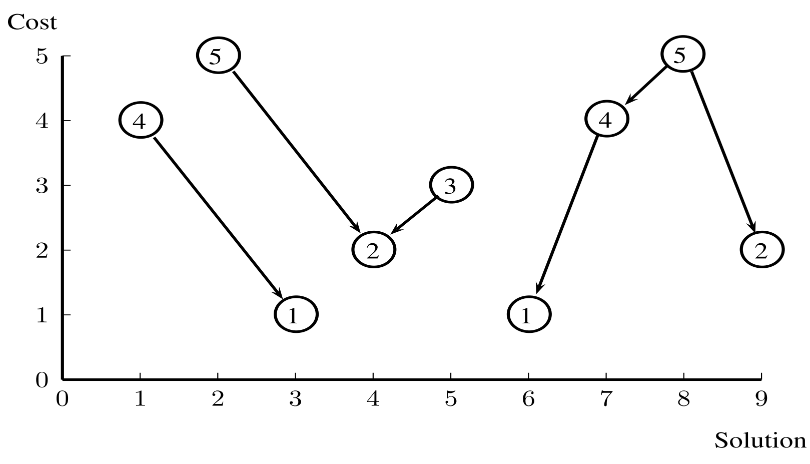
32.1.2 Τοπικό βέλτιστο

Ορισμός 32.6 *Μια λύση s' ονομάζεται* ***τοπικό βέλτιστο*** *σε σχέση με τη συνάρτηση N ανν $f(s') \leq f(s)$, για κάθε $s \in N(s')$, για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Αντίστοιχα για πρόβλημα βελτιστοποίησης.*

Ορισμός 32.7 *Ο* ***γράφος μεταβάσεων*** *ενός στιγμιοτύπου (S, f) και μιας συνάρτησης γειτνίασης, είναι ένας άκυκλος κατευθυνόμενος υπογράφος του αντίστοιχου γράφου γειτνίασης G. Κατασκευάζεται αφαιρώντας από τον G όλες τις ακμές (i, j) για τις οποίες το κόστος του κόμβου j είναι μεγαλύτερο από το κόστος του κόμβου i.*

- Παρατηρήστε, ότι μια λύση είναι τοπικό βέλτιστο ανν έχει βαθμό εξόδου 0 στον γράφο μεταβάσεων.

32.1.3 Παράδειγμα γράφου μεταβάσεων



- Παρατηρήστε ότι οποιοσδήποτε αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης έχει πρόσβαση σε διαφορετικά τοπικά βέλτιστα ανάλογα με την επιλογή της αρχικής λύσης.

32.2 Παραδείγματα

32.2.1 Περιοδεύων πωλητής

Παράδειγμα 32.2 (Το πρόβλημα του περιοδεύοντα πωλητή - TSP)
Έχουμε ένα σύνολο n *πόλεων,* $C = \{1, 2, .., n\}$ *και ένα* $n \times n$ *πίνακα* d *, όπου* $d_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ *η απόσταση από την πόλη* i *στην πόλη* j*. Ζητείται να βρεθεί μια 'περιοδεία' με ελάχιστο μήκος.*
Δηλαδή, μια διάταξη τ *του* C *που ελαχιστοποιεί τη σχέση:*

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\tau(i),\tau(i+1)} + d_{\tau(n),t(1)}.$$

(Το $\tau(i)$ *εδώ, αντιστοιχεί στην* i*-οστή πόλη που επισκέπτεται,* $\tau = (\tau(1), \tau(2), .., \tau(n))$*.)*

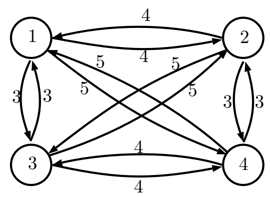
Παράδειγμα 32.3

- *Ισοδύναμο με εύρεση ελάχιστου Hamiltonian κύκλου με βάρη σε ένα πλήρες, κατευθυνόμενο γράφημα* n *κόμβων με βάρη στις ακμές, όπου το βάρος της ακμής* (i, j) *είναι* $d_{i,j}$*.*

Πχ. Για ένα στιγμιότυπο με n *πόλεις και πίνακα αποστάσεων*

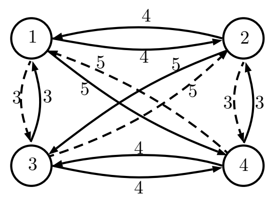
$$d = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

, έχουμε το γράφο



.

Και η περιοδεία $\tau = (1, 2, 3, 4)$ *είναι ο κύκλος* $Hamilton$ *:*



32.2.2 Γενικά για το πρόβλημα (I)

Χώρος λύσεων (solution space):

- Πλήθος των διαφορετικών περιοδειών.
- Κάθε περιοδεία ορίζεται από τη σειρά των πόλεων (και μόνο - όχι από το ποια είναι η αρχική πόλη), άρα το μέγεθος του χώρου λύσεων είναι $(n-1)!$

Ειδικές περιπτώσεις:

- SYMMETRIC TSP. $d_{i,j} = d_{j,i}$.

- METRIC TSP. Ο πίνακας αποστάσεων ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα ($d_{i,j} \leq d_{i,k} + d_{k,j}$)

- EUCLIDEAN TSP. Οι αποστάσεις των πόλεων είναι η ευκλείδεια απόστασή τους.

32.2.3 Γενικά για το πρόβλημα (II)

- Όλες οι παραπάνω παραλλαγές του προβλήματος είναι NP-hard.

- Διαφέρουν από άποψη προσεγγισιμότητας:

- Για τα TSP και SYMMETRIC TSP, η εύρεση μιας περιοδείας μήκους το πολύ $2^{p(n)}$ φορές τη βέλτιστη είναι $NP-hard$ για τυχαίο πολυώνυμο p. (*Sahni, Gonzalez [1976]*)

- Για το METRIC TSP υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου $\frac{3}{2}$- προσεγγιστικός αλγόριθμος, αλλά η εύρεση περιοδείας με μήκος το πολύ $\frac{220}{219}$ φορές την βέλτιστη είναι NP-hard.(*Christofides [1976] - Cornuejols, Nemhauser [1978] - Papadimitriou, Vempala [2000]*)

- Για το EUCLIDEAN TSP, υπάρχει ένα PTAS, αλλά όχι FPTAS αν $P \neq NP$. (*Arora [1998] - Ausiello [1999]*)

32.2.4 Αλγόριθμος k-Opt

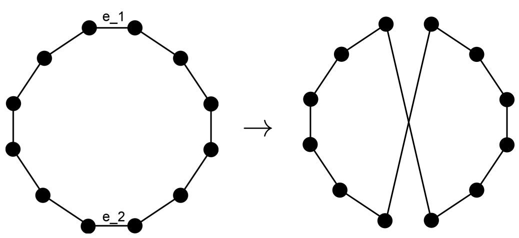
- Επαναληπτική βελτίωση με χρήση της συνάρτησης γειτνίασης k-change.

- Μια k-change διαγράφει $k' \leq k$ ακμές από τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton της λύσης και τις αντικαθιστά με k' νέες, έτσι ώστε η καινούρια λύση να είναι ορθή (να είναι περιοδεία - κύκλος $Hamilton$).

- Μια λύση (περιοδεία) είναι γειτονική μιας άλλης αν μπορεί να παραχθεί με εφαρμογή μιας k-change στη δεύτερη.

32.2.5 Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (I)

- Στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με 12 πόλεις και χρήση του k-opt με $k = 2$.
- Έστω τυχαία περιοδεία τ. Παράδειγμα εφαρμογής k-change αλλάζοντας τις ακμές e_1, e_2.



- Παρατηρήστε ότι για κάθε δυο ακμές υπάρχει μόνο μια δυνατή αντικατάσταση η οποία να οδηγεί σε μια *νέα* λύση που να είναι ορθή (Ham.).
- Επιπλέον δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε μόνο μια ακμή, η δυο διαδοχικές και να πάρουμε μια καινούρια, ορθή λύση.

32.2.6 Αλγόριθμος k-Opt - Παράδειγμα (II)

- Άρα, η γειτονιά μιας περιοδείας τ αποτελείται από την περιοδεία τ και μια περιοδεία για κάθε επιλογή δυο μη διαδοχικών ακμών e_2, e_2.
- Άρα το κάθε τ έχει $1 + n(n-3)/2 = 55$, $(\Theta(n^2))$ γείτονες. (Ο τύπος ισχύει για κάθε στιγμιότυπο του SYMMETRIC TSP με χρήση της 2-change.)
- Παρατηρήστε ότι με τη χρήση της k-change στο SYMMETRIC TSP, αν έχουμε το μήκος l μιας περιοδείας και ψάχνουμε το μήκος l' μιας γειτονικής της, μπορούμε να το κάνουμε σε σταθερό χρόνο:

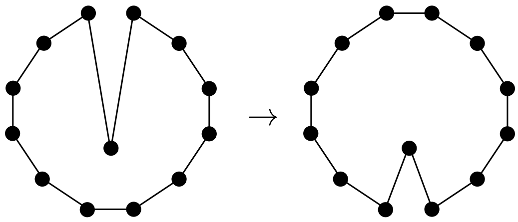
  $$l' = l - \sum_{i=1}^{k'} d(e_i) + \sum_{i=1}^{k'} d(e'_i),$$

  Όπου $e_1, e_2, .., e_{k'}$ οι ακμές που διαγράφηκαν και $e'_1, e'_2, .., e'_{k'}$ οι ακμές που προστέθηκαν.

- Άρα, για το 2-change, μια επανάληψη της επαναληπτικής βελτίωσης γίνεται σε χρόνο $\mathcal{O}(n^2)$.

32.2.7 Εναλλακτική συνάρτηση γειτνίασης - node insertion

- Οι γείτονες μιας περιοδείας τ βρίσκονται διαγράφοντας μια πόλη στην τ και προσθέτοντάς την σε μια άλλη θέση στην περιοδεία (ανάμεσα σε δυο άλλους κόμβους).
- Παράδειγμα:



- Μια γενίκευση θα ήταν η εισαγωγή ενός τμήματος διαδοχικών πόλεων ανάμεσα σε δυο γειτονικές στην περιοδεία.

32.2.8 Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (I)

- Ποια από τις παραπάνω είναι καλύτερη για το πρόβλημα;
- Για να τις συγκρίνουμε αρκεί να μελετήσουμε τις ιδιότητες των γράφων γειτνίασης.
- Ο μέγιστος βαθμός συνδέεται με το κόστος της κάθε επανάληψης του αλγορίθμου (πλήθος γειτόνων).
- Η διάμετρος με το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων που μπορεί να απαιτούνται.
- Προσέξτε ότι έτσι συγκρίνουμε μόνο τις συναρτήσεις γειτνίασης, ανεξάρτητα από την πολιτική επιλογής γείτονα από τον αλγόριθμο.

32.2.9 Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (II)

Θεώρημα 32.1 *Η διάμετρος του γράφου γειτνίασης του node insertion για το TSP είναι* $n-2$.

Απόδειξη 1

- ***Βήμα 1:*** $d \leq n-2$, *όπου* d *η διάμετρος.*

- *Θα δείξουμε ότι για δυο τυχαίες περιοδείες τ, τ', η τ' μπορεί να παραχθεί από την τ εφαρμόζοντας το πολύ $n-2$ κινήσεις node insertion.*
- *Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\tau'(1) = \tau(1)$.*
- *Αφαιρούμε τις πόλεις $\tau'(3), \tau'(4), .., \tau'(5)$ από την τ και τις προσθέτουμε ακριβώς πίσω από την $\tau'(1)$ με αυτή τη σειρά. (Εξαιρούμε πόλεις που έχουν την ίδια θέση).*
- *Άρα το συνολικό πλήθος των node insertions είναι το πολύ $n-2$.*

Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III) *Απόδειξη συν.*

- ***Βήμα 2:*** $d \geq n-2$.
- *Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω $d \leq n-3$.*
- *Έστω η περιοδεία $\tau = (1, 2, ..., n)$ και η περιοδεία $\tau' = (n, n-1, .., 1)$.*
- *Αφού $d \leq n-3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την τ' από την τ αλλάζοντας την θέση το πολύ $n-3$ πόλεων, άρα κρατώντας την σχετική σειρά τουλάχιστον τριών πόλεων.*
- *Αυτό είναι άτοπο αφού για τρεις πόλεις i, j, k με $i < j < k$ έχουμε ότι η περιοδεία τ τις επισκέπτεται με σειρά i, j, k ενώ η τ' με σειρά k, j, i.*

32.2.10 Σύγκριση δυο συναρτήσεων γειτνίασης (III)

- Εύκολα βλέπουμε, ότι για το TSP κάθε κόμβος στον γράφο γειτνίασης του node insertion έχει βαθμό $n(n-3)$ για κάθε $n \geq 4$.
- Επιπλέον, για το γράφο γειτνίασης του 2-change ισχύουν:
  - Κάθε κόμβος έχει βαθμό $n(n-2) - 2$.
  - Ο γράφος έχει διάμετρο d που ικανοποιεί $\frac{n}{2} \leq d \leq n-2$ για $n >= 5$.
- Άρα βλέπουμε ότι και οι δυο συναρτήσεις γειτνίασης έχουν γράφους μεταβάσεων με διάμετρο $\mathcal{O}(n)$ και μέγιστο βαθμό $\mathcal{O}(n^2)$.

Ορισμός 32.8 *Ένα πρόβλημα* Π *ανήκει στην κλάση* **PLS** *(Polynomial Local Search) αν οι λύσεις είναι πολυωνυμικά φραγμένες ως προς το μήκος της εισόδου, και υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για τα επόμενα:*

1. *Δοθείσης συμβολοσειράς I, έλεγξε αν το I είναι στιγμιότυπο του Π, και αν ναι υπολόγισε μια αρχική λύση που να ανήκει στο $Sol(I)$.*

2. *Δοθέντων I, s, έλεγξε αν $s \in Sol(I)$, και αν ναι, υπολόγισε το κόστος της λύσης $c_I(s)$.*

3. *Δοθέντων I, s, έλεγξε αν η s αποτελεί* τοπικά *βέλτιστη λύση, και αν όχι, βρες μία "καλύτερη" λύση $s' \in N_I(s)$, όπου $N_I(s)$ οι γείτονες της λύσης s για το στιγμιότυπο I.*

Κάθε πρόβλημα στην **PLS** δέχεται έναν αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης: Χρησιμοποιούμε τον πρώτο αλγόριθμο για να αποκτήσουμε μια αρχική λύση, και μετά επαναληπτικά εφαρμόζουμε τον τρίτο αλγόριθμο μέχρι να φτάσουμε σε μία τοπικά βέλτιστη λύση. Δεδομένου ότι οι εφικτές λύσεις είναι εκθετικά πολλές, η παραπάνω διαδικασία δεν ολοκληρώνεται απαραίτητα σε πολυωνυμικό χρόνο.

Παράδειγμα 32.4 *Έστω το πρόβλημα* `MAXCUT`*, όπου μας δίνεται ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $G(V, E)$ και ένα βάρος $w_e \geq 0$ για κάθε ακμή. Οι εφικτές λύσεις αντιστοιχούν σε διαμερίσεις $(S, \overline{S})$ του συνόλου των κορυφών, και η αντικειμενική συνάρτηση στην μεγιστοποίηση του συνολικού βάρους των ακμών που ανήκουν στην διαμέριση*[1]*. Δύο λύσεις είναι γειτονικές αν μπορούμε να μεταβούμε από την μία στην άλλη μεταφέροντας μία κορυφή από την διαμέριση στο συμπλήρωμά της. Ξεκινάμε από μία αυθαίρετη διαμέριση $(S, \overline{S})$, και όσο υπάρχει καλύτερη γειτονική λύση, μεταβαίνουμε σε αυτήν. Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν δεν υπάρχει καλύτερη γειτονική λύση, δηλαδή όταν έχουμε φτάσει σε μία τοπικά βέλτιστη λύση. Παρατηρήστε ότι το πλήθος τον εφικτών λύσεων του* `MAXCUT` *είναι εκθετικό ως προς το μήκος της εισόδου.*

Η δομή του προβλήματος επάγει έναν γράφο G, όπου οι κορυφές είναι οι εφικτές λύσεις, και δύο κορυφές συνδέονται με ακμή αν μπορούμε να μεταβούμε από την μία στην άλλη με μία απλή αλλαγή.

Παρατηρούμε ότι κάθε πρόβλημα στην κλάση **PLS** ανήκει στην κλάση **TFNP**, λόγω του γεγονότος ότι κάθε κατευθυνόμενος ακυκλικός γράφος (DAG) έχει μία καταβόθρα (sink), ή εναλλακτικά, ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο αριθμών έχει ελαχιστικό στοιχείο.

Για να ορίσουμε την έννοια της **PLS**-πληρότητας, χρειαζόμαστε αναγωγές για προβλήματα αναζήτησης:

[1] Μία ακμή ανήκει στην διαμέριση αν η μία κορυφή της ανήκει στο S και η άλλη στο $\overline{S}$.

Ορισμός 32.9 *Μία αναγωγή από ένα πρόβλημα αναζήτησης Π_1 σε ένα πρόβλημα Π_2 αποτελείται από δύο αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου:*

1. *Ένας αλγόριθμος A που απεικονίζει στιγμιότυπα $x \in \Pi_1$ σε στιγμιότυπα $A(x) \in \Pi_2$.*

2. *Ένας αλγόριθμος B που απεικονίζει λύσεις y του Π_2 με είσοδο $A(x)$ σε λύσεις $B(y)$ του Π_1 με είσοδο x.*

Στην περίπτωση της **PLS**, οι λύσεις που απεικονίζονται από τον B είναι τα τοπικά βέλτιστα.

Τα επόμενα προβλήματα είναι **PLS**-πλήρη: `MAXCUT`, `TSP`, `MAXSAT`, και `PURE NASH EQUILIBRIUM` σε παίγνια συμφόρησης.

Άσκηση 32.1 *Έστω Π_1, Π_2 προβλήματα βελτιστοποίησης, τέτοια ώστε το Π_1 να ανάγεται στο Π_2 με την παραπάνω αναγωγή. Δώστε αλγόριθμο τοπικής αναζήτησης για το Π_1, όταν υπάρχει αλγόριθμος τοπικής αναζήτησης για το Π_2.*

32.3 Αναζήτηση Ισορροπιών Nash - Η κλάση PPAD

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την κλάση πολυπλοκότητας **PPAD** (*Polynomial Parity Arguments on Directed graphs*), η οποία εισήχθη από τον Χρίστο Παπαδημητρίου και αποτελεί υποκλάση της **TFNP**. Το ενδιαφέρον στοιχείο σχετικά με την κλάση αυτή είναι το γεγονός ότι συνδέεται στενά με τον κλάδο της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, καθώς περιλαμβάνει μεταξύ άλλων και το πρόβλημα υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε κάποιο παίγνιο δύο ή περισσοτέρων παικτών. Μάλιστα το τελευταίο πρόβλημα έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί πλήρες πρόβλημα για την κλάση.

Προτού αναφερθούμε στον, ‘‘περίεργο’’ με την πρώτη ματιά, ορισμό της κλάσης **PPAD**, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με σύντομο τρόπο (και με αρκετή φαντασία από την πλευρά του αναγνώστη) το κίνητρο πίσω από την σύλληψή του. Κομβικό ρόλο στην παρουσίασή μας θα παίξουν τρεις βασικές έννοιες, φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους, οι οποίες προέρχονται από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

$\boxed{\text{(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (Ι)}}$

- Μαθηματικά μοντέλα για τη μελέτη του ανταγωνισμού (και της συνεργασίας) μεταξύ λογικών και ευφυών οντοτήτων (παίκτες), που λαμβάνουν αποφάσεις.
- **Λογικός:**
  - Ένας παίκτης που παίρνει αποφάσεις με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους του.
  - Από von Neumann και Morgenstern (με βασικές παραδοχές) υπάρχει ανάθεση ποσού (αριθμητικού) σε κάθε συνδυασμό επιλογών των παικτών του παιγνίου που να αντιπροσωπεύει (σχετικά) το κέρδος του παίκτη.
- **Ευφυής**
  - Έχει πλήρη γνώση της δομής του παιχνιδιού και των διαθέσιμων στρατηγικών όλων των παικτών.
  - Μπορεί να κατανοήσει μια κατάσταση και να εξάγει συμπεράσματα γι΄ αυτήν.
  - Γνωρίζει ότι και οι άλλοι παίκτες είναι λογικοί και ευφυείς.

$\boxed{\text{(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (ΙΙ)}}$

Ορισμός 32.10 *Παίγνιο σε στρατηγική μορφή Ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή, είναι κάποιο Γ της μορφής:*

$$\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$$

Όπου:

- N *το σύνολο παικτών.*
- C_i *το σύνολο των διαθέσιμων αμιγών στρατηγικών του παίκτη* i.
- $u_i : \times_{j \in N} C_j \to \mathbb{R}$ *το κέρδος του παίκτη* i *σε ένα περίγραμμα στρατηγικών.*

Ορισμός 32.11 *Περίγραμμα στρατηγικής - Κατάσταση παιγνίου Ένας συνδυασμός στρατηγικών (μια για κάθε παίκτη) που μπορούν να επιλέξουν οι παίκτες του συνόλου* N. *Συμβολίζουμε ως* $C = \times_{j \in N} C_j$ *το σύνολο όλων των πιθανών περιγραμμάτων αμιγών στρατηγικών*

(Πολύ) Γενικά για τη θεωρία παιγνίων (ΙΙΙ)

Ορισμός 32.12 (Μικτή στρατηγική) *Δεδομένου ενός παιγνίου* $\Gamma = (N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ *μια* ***μικτή στρατηγική*** *του παίκτη* i *είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο* C_i. *Έστω* $\Delta(C_i)$ *το σύνολο όλων των δυνατών πιθανοτικών στρατηγικών του παίκτη* i.

Ορισμός 32.13 *Περίγραμμα μεικτών στρατηγικών*

- *Ένα διάνυσμα που καθορίζει μια μικτή στρατηγική για κάθε παίκτη (σύνολο όλων των δυνατών περιγραμμάτων:* $\times_{i \in N} \Delta(C_i)$*).*
- *Δηλαδή,* σ *είναι περίγραμμα στρατηγικών,* $\sigma \in \times_{i \in N} \Delta(C_i)$ *ανν για κάθε* $i \in N$ *και* $c_i \in C_i$ *ορίζει την πιθανότητα* $\sigma_i(c_i)$, $(\sigma = (\sigma_i)_{i \in N})$ *, ο παίκτης* i *να επιλέξει τη στρατηγική* c_i *έτσι ώστε:*

$$\sum_{d_i \in C_i} \sigma_i(d_i) = 1, \quad \forall i \in N$$

Ισορροπία Nash

- Έστω $u_i(\sigma)$ το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη i στο περίγραμμα σ $\left(u_i(\sigma) = \sum_{c \in C} \left(\prod_{j \in N} \sigma_j(c_j) \right) u_i(c), \forall i \in N, c = (c_i)_{i \in N} \right)$

- Για $\tau_i \in \Delta(C_i)$ έστω (σ_{-i}, τ_i) το περίγραμμα στο οποίο ο i-οστός συντελεστής είναι τ_i και οι υπόλοιποι όπως στο σ (ένας παίκτης άλλαξε στρατηγική).

Ορισμός 32.14 *Ένα περίγραμμα σ είναι* ***ισορροπία Nash*** *(NE) ανν δεν υπάρχει παίκτης που μπορεί να αυξήσει το κέρδος του αν αποκλίνει μονομερώς από το σ, δηλ:*

$$u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \tau_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall \tau_i \in \Delta(C_i)$$

Η πρώτη έννοια στην οποία θα αναφερθούμε αποτελεί η *ισορροπία Nash*, η οποία κατέχει κυρίαρχο ρόλο στον κλάδο της Θεωρίας Παιγνίων, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο[2]. Έστω (S, f) ένα παίγνιο n *παικτών*, όπου S_i το σύνολο των *στρατηγικών* του παίκτη i, $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ το σύνολο των *στρατηγικών προφίλ* των παικτών, και $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ η *συνάρτηση κέρδους* υπολογισμένη στο $x \in S$. Έστω x_i το προφίλ στρατηγικής του παίκτη i και x_{-i} τα προφίλ στρατηγικής όλων των υπολοίπων παικτών εκτός του i. Δεδομένου ότι κάθε παίκτης $i \in \{1, \ldots, n\}$ επιλέγει την στρατηγική x_i, το προφίλ των στρατηγικών που επιλέγονται περιγράφεται από το διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και το κέρδος κάθε παίκτη υπολογίζεται από τη συνάρτηση κέρδους $f_i(x)$. Βασική παρατήρηση στο σημείο αυτό, και ίσως το στοιχείο που διαφοροποιεί τη Θεωρία Παιγνίων από λοιπούς κλάδους σχετικούς με τη βελτιστοποίηση, είναι ότι το κέρδος κάθε παίκτη εξαρτάται, όχι μόνο από την στρατηγική x_i που ο ίδιος θα επιλέξει, αλλά και από τις στρατηγικές x_{-i} που θα ακολουθήσουν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες.

Ορισμός 32.15 (Ισορροπία Nash) *Ένα στρατηγικό προφίλ $x^* \in S$ αποτελεί ισορροπία Nash, εάν κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του αλλάζοντας μονομερώς την στρατηγική του. Με άλλα λόγια:*

$$\forall i, x_i \in S_i : f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq f_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση όπου η παραπάνω ανισότητα ισχύει γνησίως για όλους τους παίκτες και τις στρατηγικές, έχουμε τον ορισμό της αυστηρής Nash ισορροπίας. Αντίστοιχα, εάν κάποιος παίκτης μπορεί να αλλάξει την στρατηγική του διατηρώντας (αλλά όχι απαραίτητα αυξάνοντας) το κέρδος του, γίνεται λόγος για ασθενή Nash ισορροπία.

Με απλά λόγια λοιπόν, μια ισορροπία Nash περιγράφει την κατάσταση εκείνη όπου κάθε παίκτης, αν θεωρήσει τις επιλογές των στρατηγικών των υπολοίπων

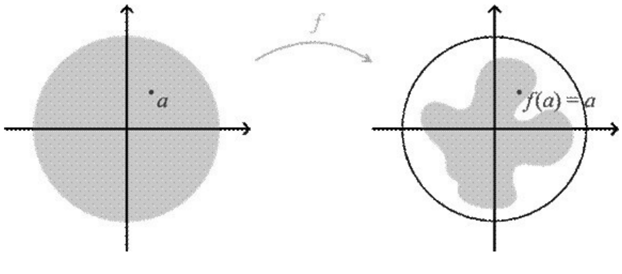
[2]Σημειώνουμε ότι στα παρακάτω, υποθέτουμε μια έστω βιβλιογραφική γνώση του αντικειμένου της Θεωρίας Παιγνίων από την πλευρά του αναγνώστη.

παικτών δεδομένες και αμετάβλητες, δεν μπορεί να βελτιώσει τη θέση του αλλάζοντας τη δική του στρατηγική. Ένας εξαιρετικά χρήσιμος τρόπος διάκρισης των ισορροπιών Nash είναι σε *απλές* και *μικτές*. Στην απλή ισορροπία Nash, κάθε παίκτης έχει δικαίωμα να επιλέξει ακριβώς μια από τις διαθέσιμες στρατηγικές του. Αντίθετα, στην περίπτωση της μικτής Nash ισορροπίας, κάθε παίκτης επιλέγει μια κατανομή επί των διαθέσιμων στρατηγικών του, ενώ η τελική στρατηγική που θα παίξει επιλέγεται τυχαία βάσει της κατανομής αυτής. Σε γενικές γραμμές σε κάποιο παίγνιο μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μία ή και καμία απλή Nash ισορροπία. Το ενδιαφέρον στοιχείο σχετικά με τις μικτές Nash ισορροπίες είναι ότι, όπως απέδειξε ο ίδιος ο John Forbes Nash, υπάρχουν πάντα σε παίγνια με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο αριθμό απλών στρατηγικών.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη του Nash για την ύπαρξη (μικτών) Nash ισορροπιών σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο έπαιξε το παρακάτω τοπολογικό θεώρημα:

Ορισμός 32.16 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer) *Έστω $S \subset \mathcal{R}^n$ ένας κυρτός και συμπαγής (κλειστός και φραγμένος) χώρος. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S \to S$, υπάρχει ένα σημείο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$ (σταθερό σημείο).*

Ένα παράδειγμα που χρησιμοποιείται συχνά για να εκφράσει το παραπάνω θεώρημα είναι η ακόλουθη: Αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε μέσα στην Πολυτεχνειούπολη και κρατάμε στα χέρια μας ένα χάρτη της Πολυτεχνειούπολης. Αν πετάξουμε τον χάρτη στο έδαφος, τότε, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, θα υπάρχει σημείο του χάρτη το οποίο θα ακουμπάει με το πραγματικό σημείο της Πολυτεχνειούπολης το οποίο απεικονίζει. Πράγματι, μπορούμε να δούμε ότι ο χάρτης ενός μέρους, όταν βρίσκεται στο μέρος αυτό, αποτελεί συνεχή συνάρτηση που απεικονίζει ένα συμπαγή και κυρτό χώρο στον εαυτό του.



Σχήμα 32.1: Σχηματικό παράδειγμα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου.

Η βασική ιδέα πίσω από την απόδειξη του Nash είναι ότι μπόρεσε, μέσω μιας κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης, να ποσοτικοποιήσει το ''ένστικτο'' κάθε παίκτη και την τάση που έχει, δεδομένου ενός προφίλ στρατηγικών, να αλλάξει τη (μικτή) στρατηγική του, έτσι ώστε να αυξήσει το αναμενόμενο κέρδος του. Δεδομένου ότι για πεπερασμένα παίγνια η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί εκ κατασκευής τις υποθέσεις του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου, απέδειξε ότι οι Nash ισορροπίες αντιστοιχούν στα σταθερά σημεία της συνάρτησης αυτής.

Θεώρημα Nash

Θεώρημα 32.2 *Θεώρημα Nash (Nash, [1951]) Για κάθε πεπερασμένο παίγνιο Γ σε στρατηγική μορφή, υπάρχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στο $\times_{i \in N}\Delta(C_i)$.*

Ορισμός 32.17 *Ένα περίγραμμα αμιγών στρατηγικών $c \in C$ είναι* ***αμιγής ισορροπία Nash*** *ανν:*

$$u_i(c) \geq u_i(c_{-i}, d_i), \quad \forall i \in N, \quad \forall d_i \in C_i$$

- Δεν υπάρχει πάντα.

32.3.1 Παίγνια δυναμικού

Ορισμός 32.18 *Έστω παίγνιο Γ και c, c' δυο οποιεσδήποτε καταστάσεις του (περιγράμματα) που διαφέρουν μόνο στην στρατηγική του παίκτη i.* ***Συνάρτηση δυναμικού*** *$\Phi : C \to \mathbb{R}$ όπου C το σύνολο καταστάσεων του παιγνίου, ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:*

$$(u_i(c) - u_i(c')) \cdot (\Phi(c) - \Phi(c')) > 0, \text{ όταν } (u_i(c) - u_i(c') \neq 0.$$

Ορισμός 32.19 ***Παίγνιο δυναμικού***, *ονομάζεται ένα παίγνιο για το οποίο υπάρχει συνάρτηση δυναμικού.*

Θεώρημα 32.3 *Κάθε παίγνιο δυναμικού έχει τουλάχιστον μια αμιγή ισορροπία κατά $Nash$.*

Απόδειξη:

- Αφού το παίγνιο έχει πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων, η συνάρτηση δυναμικού ελαχιστοποιείται σε κάποιες από αυτές.
- Έστω c η κατάσταση στην οποία ελαχιστοποιείται και c' μια κατάσταση που διαφέρει από την c στη στρατηγική ενός μόνο παίκτη i.
- Έχουμε ότι $\Phi(c) \leq \Phi(c')$, που από ορισμό δυναμικής συνάρτησης σημαίνει $u_i(c) \leq u_i(c')$.
- Συνεπώς ο παίκτης i δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς.

- Από το παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι κάθε τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης δυναμικού είναι αμιγής ισορροπία κατά $Nash$.

Θεώρημα 32.4 *Για ένα παίγνιο δυναμικού Γ, κάθε αλγόριθμος επαναληπτικής βελτίωσης με σύνολο λύσεων το σύνολο των καταστάσεων του παιγνίου (C), συνάρτηση γειτνίασης $f : C \to 2^C$ με $\{f(c) = C_c | \forall c' \in C_c$ οι c και c' διαφέρουν στη στρατηγική ενός παίκτη$\}$ και συνάρτηση κόστους τη συνάρτηση δυναμικού, καταλήγει σε αμιγή ισορροπία Nash.*

Απόδειξη 2 *Προφανής.*

Ορισμός 32.20 *Ένα* ***παίγνιο συμφόρησης*** $(N, E, (\Sigma_i)_{i\in N}, (f_e)_{e\in E})$ *ορίζεται ως εξής:*

- $N = \{1..n\}$ *το σύνολο των παικτών.*
- $E = \{1..m\}$ *το σύνολο των πόρων.*
- *Για κάθε $i \in N$, το σύνολο των στρατηγικών του i, Σ_i , είναι ένα υποσύνολο των πώρων (που χρησιμοποιεί ο παίκτης).*
- *Για κάθε $e \in E$, $f_e : N \to R^+$ είναι η συνάρτηση καθυστέρησης του πόρου e. Αν x παίκτες χρησιμοποιούν τον πόρο e η $f_e(x)$ δείχνει σε πόση καθυστέρηση υπόκεινται.*

Θεώρημα 32.5 (Συνάρτηση Rosenthal) *Η συνάρτηση $\Phi(c) = \sum_{e\in E} \sum_{i=1}^{n_e(c)} f_e(i)$, όπου c μια κατάσταση και $n_e(c)$ το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον πόρο e στην κατάσταση c, αποτελεί ακριβή συνάρτηση δυναμικού για κάθε παίγνιο συμφόρησης.*

32.4 Η κλάση *PLS*

32.4.1 *PO* και *NPO*

- Αντίστοιχες των P και NP για προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

NPO
Περιέχει τα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης για τα οποία:

- Μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο κατά πόσον μια είσοδος x ορίζει ένα έγκυρο στιγμιότυπο του προβλήματος...

- Για το οποίο η συνάρτηση κόστους είναι υπολογίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο..

- Και μπορούμε σε πολυωνυμικό χρόνο να αποφασίσουμε αν μια συμβολοσειρά s είναι αποδεκτή λύση του στιγμιότυπου, όπου το μέγεθος της κάθε αποδεκτής λύσης είναι μικρότερο από ένα όριο που είναι πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους της μεταβλητής εισόδου.

Η PO περιέχει τα προβλήματα της κλάσης NPO για τα οποία μπορούμε να βρούμε τη βέλτιστη λύση σε πολυωνυμικό χρόνο.

32.4.2 Ιδιότητες PO και NPO

- Προφανώς ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.

- Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν η κλάση των «δύσκολων» προβλημάτων στην NPO ταυτίζεται με την κλάση των NP-hard προβλημάτων στην NPO.

- Θα χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing που μας επιτρέπουν να ανάξουμε προβλήματα της NP σε προβλήματα της NPO.

- Θα ορίσουμε ένα NPO-πλήρες συνδυαστικό πρόβλημα βελτιστοποίησης και το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης και έπειτα θα δείξουμε ότι ανάγονται κατά Turing το ένα στο άλλο.

Ορισμός 32.21 (MVS)

- *Έστω ένα σύνολο δυαδικών μεταβλητών $U = x_1, x_2, ..x_n$, ένα σύνολο λογικών προτάσεων C της μορφής $c = (c_1 \vee c_2 \vee .. \vee c_m)$ (ρήτρες) με μεταβλητές (η αρνήσεις τους) από το U και ένα βάρος $w(x_i)$ για κάθε μεταβλητή x_i.*

- *Το ζητούμενο είναι να βρεθεί μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες τις ρήτρες στο C, **μεγιστοποιώντας** το άθροισμα των βαρών των μεταβλητών που έχουν αποτιμηθεί ως αληθείς.*

Ορισμός 32.22 ($\mathbf{MVS}_{dec}$)

- *Έχουμε $MVS \in NPO$. Το MVS_{dec} είναι το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ($MVS_{dec} \in NP$).*

- *Δηλαδή πρέπει να αποφασίσουμε αν υπάρχει μια ανάθεση τιμών αληθείας που να ικανοποιεί όλες της ρήτρες και το κόστος της να είναι ίσο η μεγαλύτερο ενός κάτω ορίου B.*

Λήμμα 32.1 *Τα MVS και MVS_{dec} ανάγονται κατά $Turing$ το ένα στο άλλο.*

Απόδειξη 3

1. $MVS_{dec} \leq_T MVS$, *προφανές.*
2. $MVS \leq_T MVS_{dec}$. *Θα δείξουμε ότι υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το MVS χρησιμοποιώντας ένα μαντείο για το MVS_{dec}:*
   - *Κατασκευάζουμε τον αλγόριθμο που υπολογίζει το μέγιστο δυνατό κόστος που μπορεί να έχει μια απόδοση τιμών αληθείας σε ένα στιγμιότυπο.*
   - *Μπορούμε να το κάνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας το μαντείο του MVS_{dec}:*
   - *Κάνουμε δυαδική αναζήτηση στο εύρος $[0, \sum_i w(x_i)]$ και βρίσκουμε το μεγαλύτερο B για το οποίο το MVS_{dec} επιστρέφει θετικό αποτέλεσμα (αλγόριθμος A_1).*
   - *Αρκεί να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο (πολ. χρόνου) που θα βρίσκει την ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τις ρήτρες και έχει κόστος ίσο με το αποτέλεσμα του A_1 στο αρχικό στιγμιότυπο.*
   - *Περιγραφή του αλγορίθμου, στο βήμα i:*
   - *Κατασκεύασε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I_0 από το αρχικό πρόβλημα, αντικαθιστώντας τις $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ με τις τιμές που έχουν επιστρέψει τα πρώτα $i-1$ βήματα και θέσε $x_i = 0$.*
   - *Όμοια κατασκευάζουμε το I_1 θέτοντας $x_i = 1$.*
   - *Τρέξε τον A_1 στα I_0 και I_1 αντίστοιχα και ανάλογα με το ποιο στιγμιότυπο επιστρέφει τη μεγαλύτερη έξοδο, θέσε και το x_i.*

Θεώρημα 32.6 *Το MVS είναι NPO-πλήρες (G. Ausiello et al. (1999))*

Θεώρημα 32.7 *Ένα πρόβλημα $\Pi \in NPO$ είναι NPO-πλήρες ανν το Π είναι NP-δύσκολο. (Αν χρησιμοποιήσουμε αναγωγές Turing για να συσχετίσουμε την πολυπλοκότητα των προβλημάτων)*

Απόδειξη 4

- *Προφανώς αν Π NPO-πλήρες είναι και NP-δύσκολο.*

- *Έστω ότι το* Π *είναι NP-δύσκολο.*
- *το* MVS_{dec} *ανάγεται κατά Turing στο* Π.
- *Τότε το* $MVS \leq_T MVS_{dec} \leq_T \Pi$ *και το* MVS *είναι NPO-πλήρες.*

Θεώρημα 32.8 $PO = NPO$ *ανν* $P = NP$.

Απόδειξη 5

1. *Αν* $PO = NPO$ *τότε όλα τα NP-δύσκολα προβλήματα της NPO (πχ TSP) μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο, άρα* $P = NP$.

2. *Αν* $P = NP$ *τότε το* MVS_{dec} *μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αλλά* $MVS \leq_T MVS_{dec}$ *(λύνεται σε πολ. χρόνο) και το* MVS *είναι NPO-πλήρες.*

32.4.3 *PLS*

Ορισμός 32.23 ***Στιγμιότυπο*** *ενός προβλήματος τοπικής αναζήτησης είναι η τριάδα* (S, f, N) *με* (S, f) *ένα στιγμιότυπο ενός συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης και* $N : S \to 2^S$ *μια συνάρτηση γειτνίασης για το* S.

Ορισμός 32.24 *Ένα* **πρόβλημα τοπικής αναζήτησης** Π_{LS} *ορίζεται από ένα σύνολο στιγμιοτύπων και από το αν είναι πρόβλημα ελαχιστοποίησης η μεγιστοποίησης.*
Δεδομένου ενός στιγμιότυπου (S, f, N), *ζητείται μια τοπικά βέλτιστη λύση* $\hat{s} \in N(s)$ *(πχ.* $f(\hat{s}) \geq f(s)$, $\forall s \in N(s)$, *για πρόβλημα βελτιστοποίησης).*

Ορισμός 32.25 *Έστω πρόβλημα τοπικής αναζήτησης* Π_{LS} *και* Π *το αντίστοιχο πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Λέμε ότι το* Π_{LS} *ανήκει στην κλάση PLS αν* $\Pi \in NPO$ *και υπάρχουν δυο αλγόριθμοι* A, B, *πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:*

1. *Για ένα στιγμιότυπο* (S, f, N) *του* Π_{LS} *ο αλγόριθμος* A *επιστρέφει μια λύση* $s \in S$.

2. *Για ένα στιγμιότυπο* (S, f, N) *του* Π_{LS} *και μια λύση* s, *ο αλγόριθμος* B *αποφασίζει αν η* s *είναι τοπικό βέλτιστο και, αν όχι, επιστρέφει μια γειτονική της λύση με καλύτερο κόστος.*

Προσέξτε ότι παρ' ότι η κλάση ονομάζεται **Polynomial-time Local Search**, το «polynomial» αναφέρεται στους αλγορίθμους A, B του ορισμού και όχι στο χρόνο επίλυσης του προβλήματος (μπορεί να απαιτείται εκθετικός αριθμός επαναλήψεων).

Θα ορίσουμε αναγωγές μεταξύ των προβλημάτων της κλάσης, για να μπορούμε να τα συγκρίνουμε.

Ορισμός 32.26 *Λέμε ότι το πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π_{LS} είναι PLS-reducible σε ένα πρόβλημα τοπικής αναζήτησης Π'_{LS} ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS}$) αν υπάρχουν δυο αλγόριθμοι ϕ_1 και ϕ_2 πολυωνυμικού χρόνου, τέτοιοι ώστε:*

- *Ο αλγόριθμος ϕ_1 μετατρέπει ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS} σε στιγμιότυπο $\phi_1(I)$ του προβλήματος Π'_{LS}.*

- *Ο αλγόριθμος ϕ_2 αντιστοιχίζει ένα στιγμιότυπο $I = (S, f, N)$ του Π_{LS} και μια λύση $s' \in S'$ με $\phi_1(I) = (S', f', N')$ με μια λύση $s \in S$.*

- *Για ένα στιγμιότυπο I του προβλήματος Π_{LS}, αν $s' \in S'$ τοπικό ελάχιστο για το $\phi_1(I) = (S', f', N')$, τότε το $\phi_2(I, s')$ είναι τοπικό ελάχιστο για το I.*

*Το ζεύγος (ϕ_1, ϕ_2) καλείται **PLS-reduction** (PLS-αναγωγή).*

Παρατηρήστε από τον ορισμό, ότι αν $\Pi_{ls} \propto \Pi'_{LS}$ και το Π'_{LS} έχει αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου, το ίδιο ισχύει και για το Π_{LS}. (Το Π'_{LS} είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το Π_{LS}). Οι PLS-αναγωγές, είναι μεταβατικές ($\Pi_{LS} \propto \Pi'_{LS} \wedge \Pi'_{LS} \propto \Pi''_{LS} \Rightarrow \Pi_{LS} \propto \Pi''_{LS}$)

Ορισμός 32.27 *Ένα πρόβλημα $\Pi_{LS} \in PLS$ καλείται **PLS-πλήρες** αν για κάθε $\Pi'_{LS} \in PLS$ ισχύει $\Pi'_{LS} \propto \Pi_{LS}$.*

32.4.4 Συσχετισμός PLS με PO και NPO

Θεώρημα 32.9 *$PLS \subseteq NPO$*

Απόδειξη 6

- *Έστω $\Pi_{LS} \in PLS$. Το κωδικοποιούμε σαν πρόβλημα $\Pi \in NPO$:*

- *Για κάθε στιγμιότυπο $(S, f, N) \in \Pi_{LS}$ ορίζουμε ένα στιγμιότυπο $(S, f') \in \Pi$ χρησιμοποιώντας για f' τη συνάρτηση $f' : S \to \{0, 1\}$ για την οποία $f'(s) = 0$ αν το s είναι τοπικό βέλτιστο και $f'(s) = 1$ αλλιώς.*

- *Από τον ορισμό της PLS υπάρχει αλγόριθμος (B) που αποφασίζει σε πολ. χρόνο αν μια λύση είναι τοπικό ελάχιστο για το Π_{LS}. Άρα και η f' μπορεί να τρέξει σε πολ. χρόνο.*

- *Έτσι Π_{LS} και Π ισοδύναμα και $\Pi \in NPO$.*

Θεώρημα 32.10 $PO \subseteq PLS$

- Με αντίστοιχη απόδειξη.

Έτσι:

Θεώρημα 32.11 $PO \subseteq PLS \subseteq NPO$

Θεώρημα 32.12 *Αν $NP \neq co-NP$, τότε κανένα από τα προβλήματα στην PLS δεν είναι NP-hard.*

Απόδειξη 7 *Έστω ότι υπάρχει $\Pi_{LS} \in PLS$ που είναι NP-hard. Θα δείξουμε ότι αυτό αντιτίθεται στην περίπτωση $NP \neq co-NP$, δείχνοντας ότι για κάθε πρόβλημα απόφασης $\Pi_D \in NP$ συνεπάγεται ότι το συμπληρωματικό του, Π_D^c, ανήκει επίσης στην NP.*

- *Το Π_{LS} είναι NP-hard, άρα υπάρχει πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος A που αποφασίζει το Π_D, χρησιμοποιώντας ένα μαντείο που βρίσκει τοπικά βέλτιστα για στιγμιότυπα του Π_{LS}.*

- *Άρα αν μας δοθεί η ακολουθία από τοπικά βέλτιστα που επιστρέφει το μαντείο του A κατά την εκτέλεσή του στο στιγμιότυπο I του Π_D, μπορούμε σε πολ. χρόνο να αποφασίσουμε αν το I είναι ένα ναι ή όχι-στιγμιότυπο του Π_D.*

- *Άρα αυτή η ακολουθία είναι ένα πιστοποιητικό, πολυωνυμικού μεγέθους, για ναι-στιγμιότυπα του Π_D^c.*

- *Το πιστοποιητικό, μπορεί να ελεγχθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για ορθότητα, αντικαθιστώντας κάθε κλήση στο μαντείο στον A με μια πολυωνυμικού χρόνου διαδικασία που ελέγχει κατά πόσον η συγκεκριμένη λύση στο πιστοποιητικό είναι μια λύση στο στιγμιότυπο του Π_{LS} που δίνεται στον προφήτη.*

- *Αλλά εξ' ορισμού της PLS ένας τέτοιος αλγόριθμος υπάρχει.*

- *Άρα $\Pi_D^c \in NP$.*

Με αντίστοιχο τρόπο βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει και το παρακάτω:

Θεώρημα 32.13 $PLS \subseteq FNP$

Τα πιστοποιητικά ενός προβλήματος στην PLS είναι τα τοπικά βέλτιστα και ο τρίτος αλγόριθμος στην περιγραφή ενός προβλήματος στην PLS τα ελέγχει σε πολυωνυμικό χρόνο.

32.4.5 PLS-πληρότητα

Τα πρώτα PLS-πλήρη προβλήματα:

Ορισμός 32.28 *Για ένα Boolean κύκλωμα D με n κόμβους εισόδου* $\{x_1, ..., x_n\}$ *και κόμβους εξόδου* $\{y_1, ..., y_m\}$ *ορίζουμε τη συνάρτηση γειτνίασης flip ως εξής:*

- *Το πεδίο τιμών (σύνολο των λύσεων) είναι όλα τα πιθανά διανύσματα εισόδου του κυκλώματος.*
- *Δυο λύσεις s, s' είναι γειτονικές, αν η απόστασή τους κατά Hamming είναι ένα.*

Το ζητούμενο είναι μια λύση $\hat{s}$ που να αποτελεί τοπικό βέλτιστο για τη συνάρτηση κόστους: $f(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{m} 2^{i-1} y_i$. *Στο **MIN-CIRCUIT/flip** στόχος είναι η εύρεση τοπικών ελαχίστων, ενώ στο **MAX-CIRCUIT/flip** η εύρεση τοπικών μεγίστων.*

Θεώρημα 32.14 *Τα MIN-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip είναι PLS-πλήρη.*

Διαδικασία (πάνω πάνω):

- Δείχνουμε ότι MIN-CIRCUIT/flip $\propto$ MAX-CIRCUIT/flip και MAX-CIRCUIT/flip $\propto$ MIN-CIRCUIT/flip
- Για κάθε $\Pi_{LS} \in PLS$ πρόβλημα ελαχιστοποίησης δείχνουμε ότι $\Pi_{LS} \propto$ MIN-CIRCUIT/flip και για $\Pi LS'$ πρόβλημα μεγιστοποίησης ότι $\Pi'_{LS} \propto$ MAX-CIRCUIT/flip.
- Χρησιμοποιούμε το θεώρημα που λέει ότι για πολυωνυμικά υπολογίσιμη δυαδική συνάρτηση f υπάρχει πολ. χρόνου αλγόριθμος που κατασκευάζει κύκλωμα σταθερού μεγέθους εισόδου n που υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης για οποιαδήποτε είσοδο με n ψηφία.

32.4.6 PLS-πληρότητα παιγνίων συμφόρησης

Θεώρημα 32.15 *Το πρόβλημα της εύρεσης μιας αμιγούς ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δυναμικού, όπου ο αλγόριθμος καλύτερης απόκρισης λειτουργεί σε πολυωνυμικό χρόνο, είναι PLS-πλήρες.*

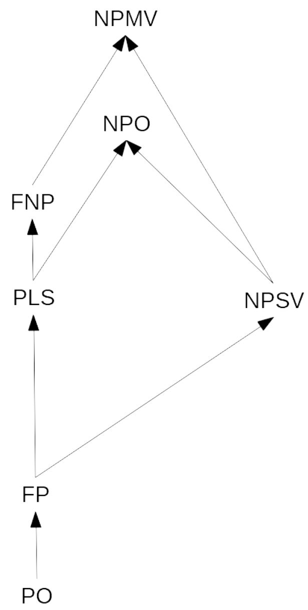
Απόδειξη 8

- *Εύκολα βλέπουμε ότι αν* Γ *παίγνιο δυναμικού,* $\Gamma \in PLS$.
- *Θα δείξουμε ότι WIGHTED SAT* $\propto$ *ΕΥΡΕΣΗ ΑΜΙΓΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΣΥΜΦΟΡΗΣΗΣ*
- *Έστω στιγμιότυπο WEIGHTED SAT με μεταβλητές* $x_1, x_2, .., x_k$ *και προτάσεις* $C_1, C_2, ..., C_n$ *με βάρος* w_j *για κάθε πρόταση* C_j.
- *Κατασκευάζουμε παίγνιο συμφόρησης* $(N, E, (\Sigma_i)_{i\in N}, (f_e)_{e\in E})$ *ως εξής:*
- *Για κάθε μεταβλητή έχουμε έναν παίκτη. Άρα το σύνολο* N *αποτελείται από* k *παίκτες.*
- *Για κάθε πρόταση έχουμε έναν πόρο. Άρα το σύνολο* E *αποτελείται από* n *πόρους.*
- *Κάθε παίκτης* i *(μεταβλητή* x_i*) έχει δυο στρατηγικές.*

  1. *Να διαλέξει το σύνολο πόρων* S_i *που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το* x_i *(αντιστοιχεί στο να θέσουμε* $x_i = 0$*) ή*
  2. *το* $\hat{S}_i$ *που είναι οι αντίστοιχοι πόροι των προτάσεων που περιέχουν το* $\hat{x}_i$*.(αντιστοιχεί στο να θέσουμε* $x_i = 1$

  αυτό μοντελοποιεί την ανάθεση τιμής της μεταβλητής x_i*. Έτσι ορίσαμε το* Σ_i.
- *Η συνάρτηση κόστους* f_j *του κόμβου* j *που αντιστοιχεί στην πρόταση* C_j *ορίζεται ως εξής:* $f_j(\xi) = 0$ *αν* $\xi < k_j$ *και* $f_j(k_j) = w_j$ *όπου* k_j *το πλήθος των μεταβλητών της πρότασης* C_j*. (προβλ. ελαχιστοποίησης)*
- *Η συνάρτηση δυναμικού που για μια κατάσταση* s *ορίζεται ως* $\Phi(s) = \sum_j f_j(\xi_j)$ *όπου* ξ_j *ο αριθμός των μεταβλητών με λογική τιμή 0 στην πρόταση* C_j *- το πλήθος των παικτών που χρησιμοποιούν τον αντίστοιχο πόρο.*
- *Έτσι η παραπάνω συνάρτηση δυναμικού ισοδυναμεί με το βάρος της αντίστοιχης τιμοδοσίας* s *στο αντίστοιχο πρόβλημα WEIGHTED SAT.*

Ο κόσμος μέχρι τώρα φαίνεται στο σχήμα 32.2



Σχήμα 32.2: Διαδικασία αναζήτησης

32.5 Αναζήτηση Ισορροπιών Nash - Η κλάση PPAD

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την κλάση πολυπλοκότητας **PPAD** (*Polynomial Parity Arguments on Directed graphs*), η οποία εισήχθη από τον Χρίστο Παπαδημητρίου και αποτελεί υποκλάση της **TFNP**. Το ενδιαφέρον στοιχείο σχετικά με την κλάση αυτή είναι το γεγονός ότι συνδέεται στενά με τον κλάδο της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, καθώς περιλαμβάνει μεταξύ άλλων και το πρόβλημα υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash σε κάποιο παίγνιο δύο ή περισσοτέρων παικτών. Μάλιστα το τελευταίο πρόβλημα έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί πλήρες πρόβλημα για την κλάση.

Προτού αναφερθούμε στον, ''περίεργο'' με την πρώτη ματιά, ορισμό της κλάσης **PPAD**, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με σύντομο τρόπο (και με αρκετή φαντασία από την πλευρά του αναγνώστη) το κίνητρο πίσω από την σύλληψή του. Κομβικό ρόλο στην παρουσίασή μας θα παίξουν τρεις βασικές έννοιες, φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους, οι οποίες προέρχονται από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών.

32.6 Αναζήτηση λύσης

32.6.1 Εισαγωγή

- Μέχρι στιγμής, ορίσαμε την κλάση PLS για προβλήματα τοπικής αναζήτησης και είδαμε ότι η εύρεση αμιγούς ισορροπίας Nash, σε παίγνια που είναι σίγουρο ότι υπάρχει, ανήκει στα δυσκολότερα προβλήματα της κλάσης.

- Το θεώρημα Nash όμως λέει ότι κάθε παίγνιο σε στρατηγική μορφή έχει τουλάχιστον μια μικτή ισορροπία.

- Ποια είναι όμως η πολυπλοκότητα εύρεσης μιας τέτοιας ισορροπίας;

32.6.2 Κατάλληλη κλάση πολυπλοκότητας (I)

- Όπως είδαμε παραπάνω, η κλάση NP δεν είναι κατάλληλη για προβλήματα αναζήτησης καθώς περιέχει προβλήματα απόφασης όπου η σωστή απάντηση σε ένα στιγμιότυπο είναι είτε "ναι" είτε "όχι".

- Για αυτό ορίσαμε το συναρτησιακό ανάλογο της NP, την FNP.

- Ένας αλγόριθμος για ένα πρόβλημα στην FNP παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο προβλήματος της NP (πχ του TSP) και επιστρέφει μια λύση - "μάρτυρα" (πχ. έναν κύκλο Hamilton), αν υπάρχει, η "όχι" αλλιώς.

- Οι αναγωγές μεταξύ προβλημάτων αναζήτησης ακολουθούν την γενική μορφή είδαμε και για την τοπική αναζήτηση.

- Ορίζονται ως δυο πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμοι, ένας αλγόριθμο A που αντιστοιχίζει στιγμιότυπα x του ενός προβλήματος σε στιγμιότυπα $A(x)$ του άλλου και ένας αλγόριθμο B που αντιστοιχίζει λύσεις του $A(x)$ σε λύσεις του x (και το "όχι" στο "όχι").

- Η διαίσθηση που έχουμε για τα προβλήματα της NP δουλεύει για την FNP. Το θεώρημα του Cook, για την NP-πληρότητα του SAT επεκτείνεται εύκολα για το συναρτησιακό ανάλογο του SAT στην FNP.

- Τι ισχύει για την εύρεση μικτών ισορροπιών Nash; Είναι FNP-πλήρες πρόβλημα;

32.6.3 Bimatrix games

- Θα αναλύσουμε μια υποκατηγορία παιγνίων σε στρατηγική μορφή, τα *bimatrix games*.
- Ουσιαστικά μιλάμε απλώς για παίγνια δυο παικτών. Ο όρος bimatrix αναφέρεται στον τρόπο αναπαράστασης των κοστών των αμιγών στρατηγικών κάθε παίκτη.
- Έτσι, η είσοδος είναι δυο πίνακες $m \times n$ κοστών A και B, ένας για τον παίκτη γραμμή και ένας για τον παίκτη στήλη (όπου m και n τα αντίστοιχα πλήθη αμιγών στρατηγικών). Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός μικτών στρατηγικών $\hat{x}$ και $\hat{y}$ τέτοιων ώστε:

  $$\hat{x}^T A\hat{y} \geq x^T A\hat{y}$$

  για κάθε μικτή στρατηγική γραμμής x και

  $$\hat{x}^T B\hat{y} \geq \hat{x}^T By$$

  για κάθε μικτή στρατηγική στήλης y.

32.6.4 *TFNP*

Γιατί όχι FNP;

Θεώρημα 32.16 *Αν ο υπολογισμός μιας μικτής ισορροπίας Nash (MNE) ενός bimatrix game είναι FNP-πλήρες πρόβλημα, τότε* $NP = coNP$.

Απόδειξη 9

- *Έστω ότι υπάρχει αναγωγή από το συναρτησιακό SAT στον υπολογισμό MNE ενός bimatrix game. Τότε θα υπάρχουν οι παρακάτω αλγόριθμοι:*

1. *Ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος A που αντιστοιχίζει κάθε φόρμουλα SAT* ϕ *σε ένα bimatrix game* $A(\phi)$.
2. *Ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος B που αντιστοιχίζει κάθε MNE* $(\hat{x}, \hat{y})$ *ενός παιχνιδιού* $A(\phi)$ *σε:*
   - *μια ανάθεση* $B(\hat{x}, \hat{y})$ *που ικανοποιεί την* ϕ*, αν υπάρχει,*
   - *στην έξοδο "όχι" αλλιώς.*

- *Η ύπαρξη όμως των παραπάνω αλγορίθμων θα σήμαινε ότι* $NP = coNP$.

- *Έστω ένα τυχαίο "όχι" στιγμιότυπο ϕ του SAT, και μια τυχαία MNE $(\hat{x}, \hat{y})$ του $A(\phi)$ (από Nash υπάρχει πάντα - ξεχνάμε κάτι;)*

- *Τότε, το $(\hat{x}, \hat{y})$ είναι πιστοποιητικό για το UNSAT, που μπορώ να ελέγξω σε πολυωνυμικό χρόνο:*

  1. *Υπολογίζουμε το παίγνιο $A(\phi)$, χρησιμοποιώντας τον A και πιστοποιούμε ότι το $(\hat{x}, \hat{y})$ είναι MNE για το $A(\phi)$.*
  2. *Τρέχουμε τον B για να πιστοποιήσουμε ότι το $B(\hat{x}, \hat{y})$ είναι το "όχι".*

- Το πρόβλημα προκύπτει από την αναντιστοιχία ενός FNP-πλήρους προβλήματος, όπου ένα στιγμιότυπο μπορεί να μην έχει "μάρτυρα" (witness) (η σωστή απάντηση μπορεί να είναι "όχι") και ενός προβλήματος όπως τον υπολογισμό MNE όπου κάθε στιγμιότυπο έχει τουλάχιστον ένα.

32.6.5 Λήμμα του Sperner (2-d)

Η επόμενη έννοια που θα μελετήσουμε, είναι το *Λήμμα του Sperner*. Αρχικά θα παρουσιάσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή, στις δυο διαστάσεις.

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο και μια τριγωνοποίηση πάνω σε αυτό (όπως στο επόμενο σχήμα).

- Οι κορυφές που δημιουργούνται από την τριγωνοποίηση χρωματίζονται με έγκυρο τρόπο σύμφωνα με τους κανόνες:

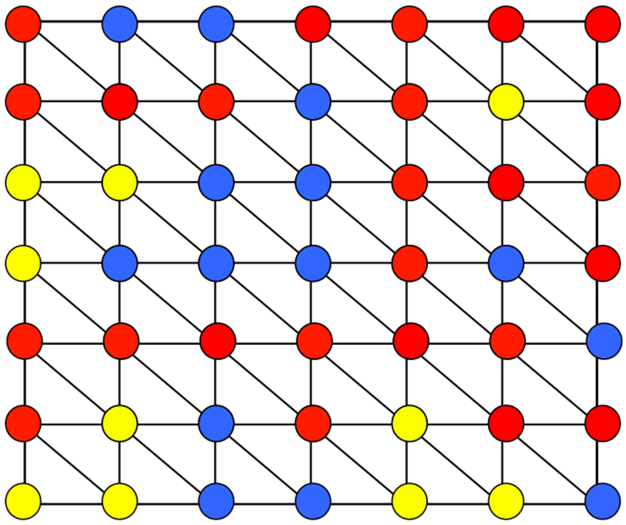
  1. Οι κορυφές της αριστερής πλευράς πρέπει να **μην** έχουν χρώμα 1 (μπλε), οι κορυφές της πάνω και της δεξιά χρώμα 2 (κίτρινο) και οι κορυφές της κάτω πλευράς χρώμα 3 (κόκκινο).
  2. Οι κορυφές που δεν βρίσκονται στις εξωτερικές πλευρές μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε χρώμα (από τα τρία).

Ορισμός 32.29 (Λήμμα του Sperner - 1928) *Σε κάθε τριγωνοποίηση με νόμιμο χρωματισμό (με τους παραπάνω κανόνες), υπάρχει κάποιο τριχρωματικό τρίγωνο. Συγκεκριμένα, το πλήθος των τριχρωματικών τριγώνων είναι περιττό.*

Απόδειξη 10

- *Για λόγους απλότητας, προσθέτουμε ένα εξωτερικό σύνορο, που δεν δημιουργεί επιπλέον τριχρωματικά τρίγωνα.*

- *Επιπλέον, δημιουργούμε ένα εξωτερικό "τεχνητό" τριχρωματικό τρίγωνο.*

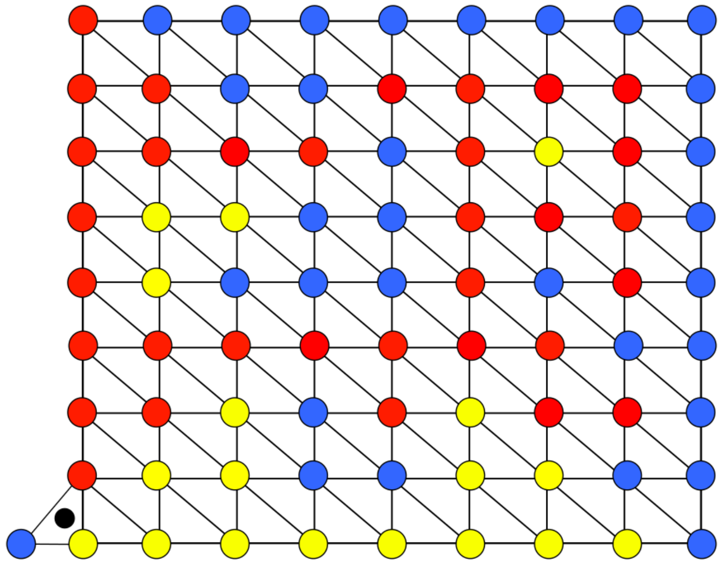


Σχήμα 32.3: Ένας έγκυρος χρωματισμός

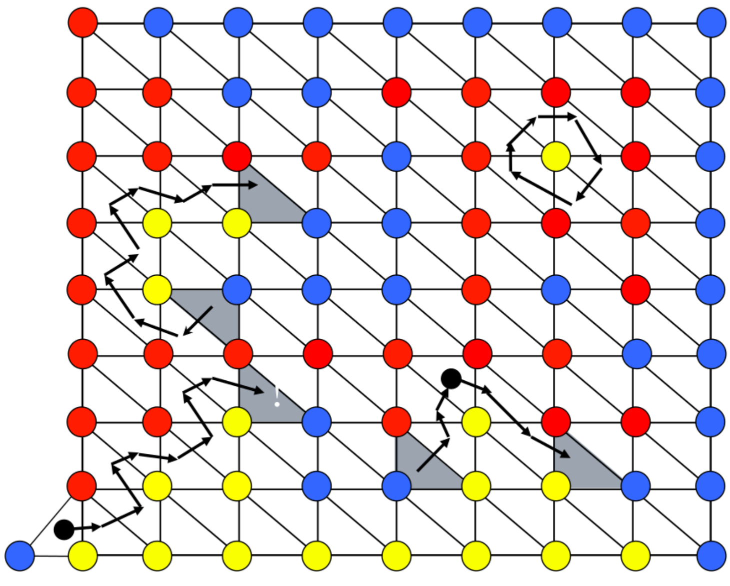
- *Έπειτα ορίζουμε έναν κατευθυνόμενο περίπατο, που ξεκινάει από αυτό το τεχνητό τρίγωνο.*
- *Παρατηρήστε ότι οι κόμβοι του περιπάτου είναι τα τρίγωνα του επιπέδου.*
- *Ορίζουμε ως κανόνα μετάβασης τον εξής: Αν υπάρχει ακμή (στο τρίγωνο που βρισκόμαστε) με ένα κόκκινο και ένα κίτρινο άκρο, τη διασχίζουμε, με το κόκκινο άκρο να είναι "στα αριστερά μας".*
- *Αν παρατηρήσουμε λίγο την κατασκευή, παρατηρούμε ότι ο περίπατος δεν μπορεί να "βγει" από το παραλληλόγραμμο, ούτε να δημιουργήσει κύκλο.*
- *Συνεπώς, πρέπει να σταματήσει κάπου εντός του παραλληλογράμμου, πράγμα που μπορεί να συμβεί μόνο σε τριχρωματικό τρίγωνο.*
- *Αρχίζοντας από άλλα τριχρωματικά τρίγωνα, μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των τριχρωματικών τριγώνων είναι περιττό (εξαιρούμε το βοηθητικό τρίγωνο εκτός του σχήματος).*

Μπορούμε τώρα, να ορίσουμε το σχετικό πρόβλημα αναζήτησης SPERNER:

Ορισμός 32.30 (SPERNER) *Δίνεται ως είσοδος ένα πλέγμα $2^n \times 2^n$ κορυφών, όπου οι κορυφές των συνόρων έχουν κάποιον έγκυρο χρωματισμό (όπως παραπάνω). Θεωρούμε ότι το χρώμα κάθε εσωτερικής κορυφής, δίνεται από ένα κύκλωμα που παίρνει ως είσοδο τις συντεταγμένες της κορυφής και δίνει ως*



Σχήμα 32.4: Το νέο σχήμα



Σχήμα 32.5: Διαδικασία αναζήτησης

έξοδο το χρώμα. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί ένα τριχρωματικό τρίγωνο στο πλέγμα.

- Από την παραπάνω απόδειξη και τον δεύτερο ορισμό της PPAD είναι προφανές ότι το SPERNER ανάγεται στο END OF THE LINE και συνεπώς $SPERNER \in PPAD$.

$\boxed{\text{BROUWER} \rightarrow \text{SPERNER (I)}}$

- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι $NASH \rightarrow BROUWER$ και ότι $SPERNER \in PPAD$.
- Για να δείξουμε ότι $NASH \in PPAD$ (αλλά και $BROUWER \in PPAD$) αρκεί να δείξουμε ότι $BROUWER \rightarrow SPERNER$.
- Θα αποδείξουμε την ύπαρξη σταθερού σημείου μέσω του λήμματος του SPERNER και μέσω της απόδειξης θα φανεί μια εμφανής αναγωγή εύρεσης σταθερού σημείου στο SPERNER.
- Ας πάρουμε μια κανονικοποιημένη συνάρτηση στο επίπεδο, $f : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]^2$. Το ζητούμενο είναι να βρούμε σταθερό σημείο.
- Η διαδικασία της απόδειξης (-αναγωγής) είναι η εξής:
    1. Για κάθε ϵ αποδεικνύουμε την ύπαρξη προσεγγιστικού σταθερού σημείου ($|f(x) - x| < \epsilon$) μέσω του λήμματος του SPERNER.
    2. Έπειτα χρησιμοποιούμε την συμπάγεια του χώρου, για να επεκτείνουμε σε ακριβή λύση (παίρνουμε το όριο του ϵ στο 0).

$\boxed{\text{BROUWER} \rightarrow \text{SPERNER (II)}}$

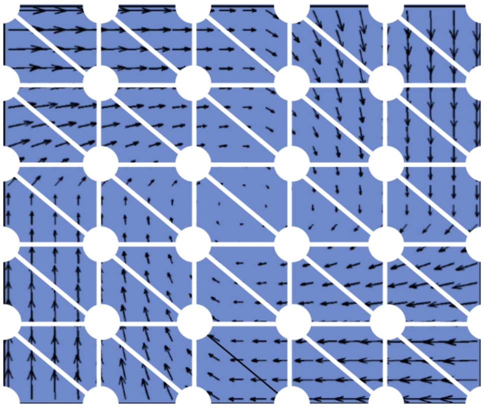
- Αρχικά κάνουμε μια "τριγωνοποίηση" στον χώρο που ορίζεται η f, θέτοντας την διάμετρο των τριγώνων σε μια τιμή που εξαρτάται από το ϵ:

$\boxed{\text{BROUWER} \rightarrow \text{SPERNER (III)}}$

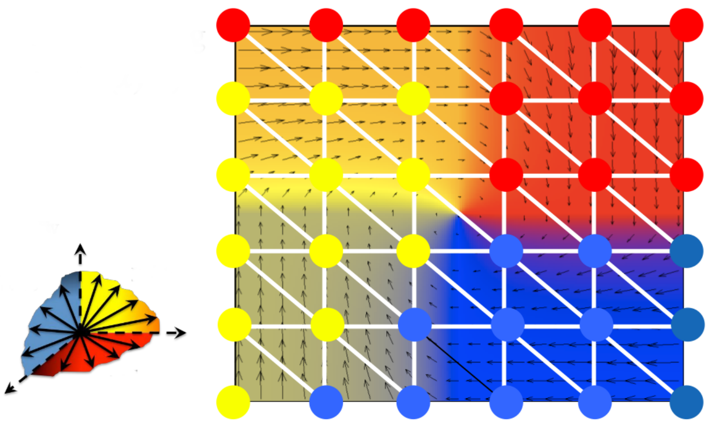
- Έπειτα χρωματίζουμε τους κόμβους της τριγωνοποίησης με βάση την κατεύθυνση της $f(x) - x$.

$\boxed{\text{BROUWER} \rightarrow \text{SPERNER (IV)}}$

- Με χρήση θεωρημάτων συνέχειας (της f), βλέπουμε ότι αν z^Y είναι η κίτρινη κορυφή ενός τριχρωματικού τριγώνου, τότε $|f(z^Y) - z^Y|_\infty < 2\epsilon$. Δηλαδή, ότι τα ϵ-προσεγγιστικά σταθερά σημεία βρίσκονται μέσα στα τριχρωματικά τρίγωνα.



Σχήμα 32.6: Τριγωνοποίηση



Σχήμα 32.7: Χρωματισμός

- Για την γενίκευση σε ακριβές σταθερό σημείο:
    1. Διαλέγουμε μια ακολουθία από έψιλον, σαν γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\frac{1}{2}$ ($\epsilon_i = 2^{-i}$).
    2. Ορίζουμε την αντίστοιχη ακολουθία τριγωνοποιήσεων, με βάση τα παραπάνω ϵ και
    3. διαλέγουμε ένα τριχρωματικό τρίγωνο σε κάθε τριγωνοποίηση και παίρνουμε την ακολουθία z_i^Y διαλέγοντας την κίτρινη κορυφή του.
- Λόγω συμπάγειας, η παραπάνω ακολουθία έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία $w_i, i = 1, 2, ..$ με οριακό σημείο το w^*.
- Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f(w^*) = w^*$.

BROUWER → SPERNER (V)

- Προφανώς, η αναγωγή που προκύπτει από την παραπάνω απόδειξη, αφορά στο πρώτο κομμάτι και στην εύρεση **προσεγγιστικών** ισορροπιών Nash.
- Γενικότερα, το πρόβλημα της εύρεσης ακριβών MNE σε πεπερασμένα παίγνια, δεν γνωρίζουμε αν είναι στην PPAD (φαίνεται να είναι αυστηρά δυσκολότερο).
- Με μια τελείως διαφορετική αναγωγή οι Lemke και Howson έδειξαν ότι ειδικά για την περίπτωση δυο παικτών (bimatrix games) το πρόβλημα της ακριβούς εύρεσης MNE ανήκει στην PPAD.

Πολυπλοκότητα εύρεσης MNE

- Είδαμε, ότι η εύρεση MNE σε πεπερασμένα παίγνια, ανήκει στην PPAD. Όμως πόσο δύσκολη είναι;
- Οι Daskalakis, Goldberg, Papadimitriou (2006) έδειξαν ότι και τα τρία παραπάνω προβλήματα (SPERNER, BROUWER, NASH) είναι PPAD-πλήρη.
- Επιπλέον, από Chen, Deng, Teng (2009) ο υπολογισμός ακριβών ισορροπιών NASH σε bimatrix games είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα.
- Αν δεχθούμε την υπόθεση, ότι τα παραπάνω προβλήματα δεν λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο, τι σημαίνει αυτό, για την ερμηνεία των ισορροπιών NASH ως συμπεριφορά φυσικών παικτών;

Σχετικές κλάσεις (Ι) Χρησιμοποιώντας διάφορα λήμματα, μπορούμε να ορίσουμε και άλλες κλάσεις:

Ορισμός 32.31 (PPADS) *Παρόμοια με την PPAD με τη διαφορά ότι αναζητούμε συγκεκριμένα μια κορυφή "sink", δηλαδή λύση με βαθμό εισόδου 1 και εξόδου 0.*

Ορισμός 32.32 (PPA) *Το ανάλογο της PPAD αλλά με μη κατευθυνόμενο γράφο.*

Ορισμός 32.33 (PPP) *Σε αυτή την κλάση ορίζεται μία συνάρτηση f στο σύνολο των λύσεων: Στόχος μας είναι να βρούμε είτε μία λύση που απεικονίζεται στην αρχική λύση, είτε δύο λύσεις y και y_1, τέτοιες ώστε $f(x, y) = f(x, y_1)$. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν πάντα λόγω της Αρχής του Περιστερεώνα (Polynomial Pigeonhole Principle).*

Η τελευταία έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε είναι το *Λήμμα του Sperner*, το οποίο και αποτελεί το συνδυαστικό ανάλογο του παραπάνω Θεωρήματος Σταθερού Σημείου. Για λόγους απλότητας, θα παρουσιάσουμε μια απλοποιημένη εκδοχή του λήμματος στην περίπτωση των δύο διαστάσεων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και μια τριγωνοποίηση πάνω σε αυτό, όπως ακριβώς βλέπουμε στην εικόνα 32.8. Επιπλέον, θεωρούμε ότι οι κορυφές που δημιουργούνται από την τριγωνοποίηση χρωματίζονται με *έγκυρο* τρόπο σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

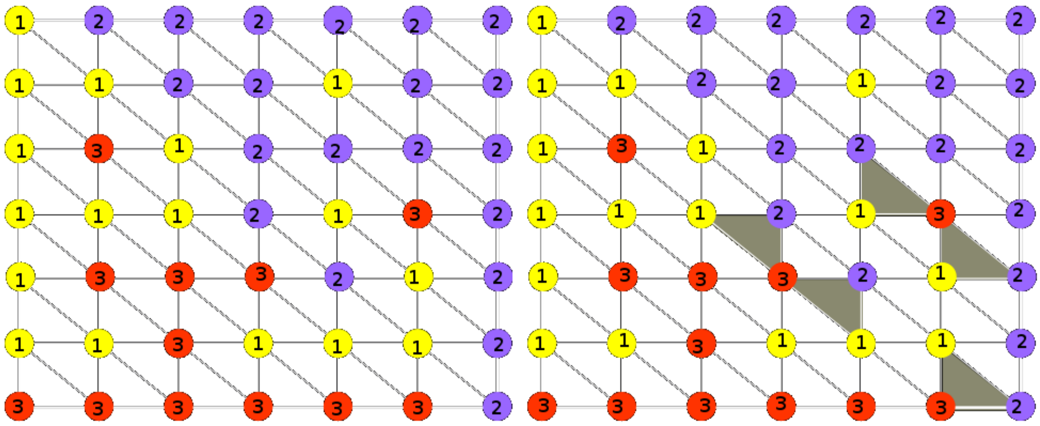
1. Οι κορυφές που ακουμπούν στην πλευρά ΑΒ πρέπει να έχουν υποχρεωτικά χρώμα 1 (κίτρινο), στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ χρώμα 2 (μπλε) και στην πλευρά ΔΑ χρώμα 3 (κόκκινο).

2. Οι κορυφές που δεν βρίσκονται στα σύνορα του ΑΒΓΔ μπορούν να λάβουν οποιοδήποτε χρώμα.

Λήμμα 32.2 (2D-Sperner) *Σε κάθε τριγωνοποίηση με τον παραπάνω έγκυρο χρωματισμό υπάρχει κάποιο τρι-χρωματικό τρίγωνο (tri-chromatic triangle), δηλαδή, κάποιο τρίγωνο του οποίου κάθε κορυφή θα έχει χρωματιστεί με διαφορετικό χρώμα. Ισχύει, μάλιστα, ότι ο συνολικός αριθμός των τρι-χρωματικών τριγώνων είναι περιττός.*

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αρκετά εύκολη απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού:

Απόδειξη: Δεδομένου κάποιου έγκυρου χρωματισμού, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα "τεχνητό" τρι-χρωματικό τρίγωνο, εκτός του επιπέδου του



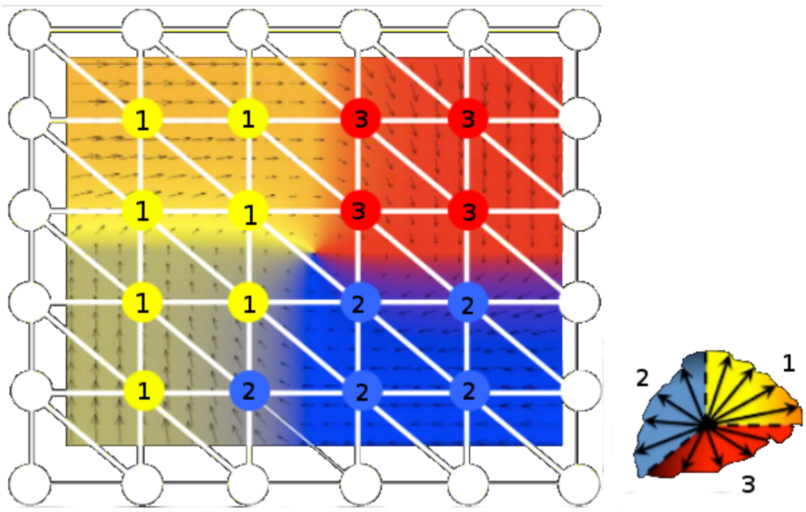
Σχήμα 32.8: Έγκυρος χρωματισμός σε τυχαία τριγωνοποίηση.

ορθογωνίου, στην κάτω αριστερά πλευρά του. Ξεκινώντας από το τρίγωνο αυτό, θα ορίσουμε έναν περίπατο ανάμεσα στα τρίγωνα, ο οποίος, όπως θα δείξουμε, θα έχει κάποιο τρι-χρωματικό τρίγωνο σαν τελικό προορισμό. Έστω KL η ακμή του τεχνητού τριγώνου (αφετηρία) που αποτελεί είσοδο στην επιφάνεια ΑΒΓ, και έστω k και l τα χρώματα των δύο κορυφών που την ορίζουν, κίτρινο και κόκκινο αντίστοιχα. Ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο θα περιπλανηθούμε στα τρίγωνα είναι ο παρακάτω: *Οποτεδήποτε βρίσκουμε στο τρέχον τρίγωνο ακμή με χρωματισμό 1 και 3, τη διασχίζουμε, μόνο εάν το χρώμα 1 βρίσκεται στα αριστερά μας.* Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι η μόνη περίπτωση όπου ο περίπατος σταματάει είναι όταν βρεθούμε σε τρι-χρωματικό τρίγωνο. Δεδομένου ότι ο αριθμός των τριγώνων είναι πεπερασμένος, ο περίπατός μας πρέπει υποχρεωτικά να σταματήσει, να βρει, δηλαδή, κάποιο τρι-χρωματικό τρίγωνο. Σε αντίθετη περίπτωση, ο περίπατος θα πρέπει να βρεθεί σε ατέρμονα βρόχο, γεγονός το οποίο, εξαιτίας του κανόνα που ορίσαμε, αποκλείεται να συμβεί. Άρα, έχοντας πλέον αποδείξει την ύπαρξη τρι-χρωματικών τριγώνων στο εσωτερικό του ΑΒΓΔ, μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να δείξουμε ότι ο αριθμός τους είναι περιττός. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας από κάποιο τρι-χρωματικό τρίγωνο και ακολουθώντας τον αντίστροφο περίπατο από αυτόν που περιγράψαμε παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι θα βρεθούμε σε κάποιο άλλο τρι-χρωματικό τρίγωνο. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα τρι-χρωματικά τρίγωνα έρχονται σε ζευγάρια. Δεδομένου, όμως, ότι ένα από αυτά είναι τεχνητό, καταλήγουμε στο ότι ο αριθμός των τρι-χρωματικών τριγώνων είναι περιττός.

□

Άσκηση: Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της παραπάνω απόδειξης.

Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer μπορεί να αποδειχθεί μέσω της χρήσης του παραπάνω λήμματος. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε μια ασθενή μορφή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου, δηλαδή, ότι υπάρχει σταθερό (με την ασθενή έννοια) σημείο x_0 για το οποίο $|f(x_0) - x_0| \leq \epsilon$, για $\epsilon > 0$. Στην περίπτωση αυτή, αν θεωρήσουμε μια κατάλληλη τριγωνοποίηση κατά Sperner πάνω στο χώρο που ορίζεται η f, απαιτήσουμε η διάμετρος των τριγώνων να είναι ϵ, και χρωματίσουμε τις κορυφές με τρία χρώματα ανάλογα με την κατεύθυνση που έχει η $f(x) - x$ στα σημεία αυτά, τότε μπορούμε (με αρκετή φαντασία) να δούμε ότι κάθε τρι-χρωματικό τρίγωνο αντιστοιχεί σε ένα ασθενές σταθερό σημείο. Τέλος, μπορούμε να περάσουμε από την ασθενή μορφή του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου στην ισχυρή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο χώρος είναι συμπαγής, και παίρνοντας το όριο του ϵ στο μηδέν. Παρακάτω, βλέπουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής στις δύο διαστάσεις:



Σχήμα 32.9: Η εύρεση του σταθερού σημείου μέσω του λήμματος Sperner στις δύο διαστάσεις

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε περιγράψει τις τρεις παραπάνω έννοιες καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους, χρησιμοποιώντας αμιγώς υπαρξιακά επιχειρήματα, χωρίς να σχολιάσουμε τα σχετικά ζητήματα πολυπλοκότητας υπολογισμού. Πόσο δύσκολο είναι, δηλαδή, να βρούμε μια Nash ισορροπία, κάποιο σταθερό σημείο ή ένα τρι-χρωματικό τρίγωνο. Θα διατυπώσουμε στο σημείο αυτό τις υπολογιστικές εκδοχές των προβλημάτων `NASH` και `SPERNER`[3].

Ορισμός 32.34 *(`NASH`) Δίνονται ως είσοδος ένας αριθμός παικτών n, τα*

[3]Η υπολογιστική έκδοχη του `BROUWER` είναι ανάλογη αυτής του `NASH`.

σύνολα των στρατηγικών κάθε παίκτη, S_i, και η συνάρτηση κέρδους $f(x)$. Δίνεται επιπλέον, μια παράμετρος προσέγγισης $\epsilon > 0$. Το πρόβλημα NASH *ή* $\epsilon -$ NASH *έγκειται στο να βρούμε μια ισορροπία, όπου κανένας παίκτης δεν θα μπορεί, αλλάζοντας μονομερώς την στρατηγική του, να βελτιώσει το κέρδος του περισσότερο απο ϵ.*

Ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε μια προσεγγιστική έκδοση του προβλήματος υπολογισμού της Nash ισορροπίας (approximate Nash equilibrium) είναι ουσιώδης από πλευράς πολυπλοκότητας. Στα προηγούμενα είδαμε ότι τόσο για τη Nash ισορροπία, όσο και για το Θεώρημα Σταθερού Σημείου, έχουμε απόδειξη ύπαρξης λύσης. Η απόδειξη αυτή, ωστόσο, δεν μας δίνει κανένα στοιχείο για τη φύση της λύσης αυτής, όπως για παράδειγμα περιλαμβάνει ρητούς ή/και άρρητους αριθμός. Για να ξεπεράσουμε λοιπόν το τελευταίο πρόβλημα, για παίγνια με περισσότερους από δύο παίκτες, περιοριζόμαστε στο προσεγγιστικό NASH πρόβλημα[4].

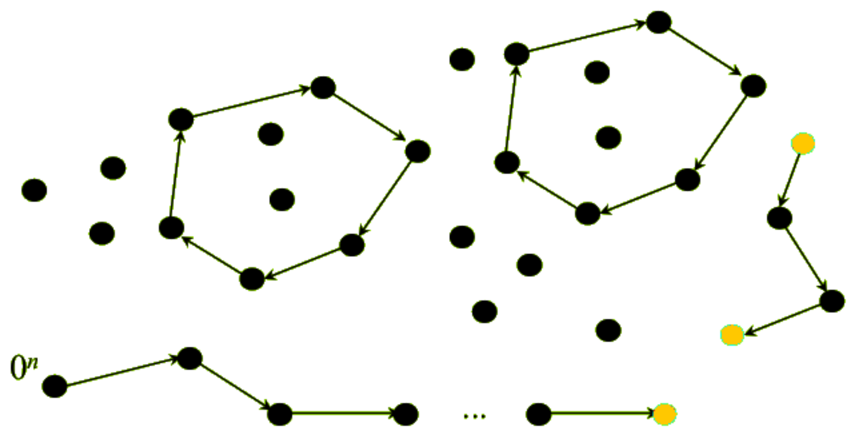
Ορισμός 32.35 (SPERNER) *Έστω ότι μας δίνεται ως είσοδος ένα πλέγμα που αποτελείται από $2^n \times 2^n$ κορυφές και ότι οι κορυφές στα σύνορα του πλέγματος έχουν κάποιον κλασικό, έγκυρο χρωματισμό (όπως αυτόν που περιγράψαμε προηγουμένως). Το χρώμα κάθε κορυφής στο εσωτερικό του πλέγματος, θεωρούμε ότι δίνεται από κάποιο κύκλωμα C το οποίο, με είσοδο τις συντεταγμένες x και y μιας κορυφής, επιστρέφει κάποιο από τα τρία χρώματα. Το πρόβλημα* SPERNER *είναι να βρούμε και να επιστρέψουμε ένα τρι-χρωματικό τρίγωνο.*

Από την προηγούμενη ανάλυση σχετικά με τη σχέση μεταξύ Nash, Θεωρήματος Σταθερού Σημείου και Sperner, μπορεί κάποιος να πεισθεί, έστω διαισθητικά, ότι το $\epsilon -$ NASH πρόβλημα μπορεί να αναχθεί στο αντίστοιχο $\epsilon -$ BROUWER, και αυτό με τη σειρά του στο SPERNER. Οι τεχνικές στις οποίες βασίζονται οι αναγωγές θυμίζουν αρκετά τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την υπαρξιακή σύνδεση των εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να δούμε ότι το πρόβλημα NASH μπορεί λυθεί μέσω του $\epsilon -$ BROUWER. Επιπλέον, τα (σχεδόν) σταθερά σημεία του $\epsilon -$ BROUWER, μπορούν να βρεθούν μέσω της εύρεσης τρι-χρωματικών τριγώνων στο αντίστοιχο SPERNER πρόβλημα, εάν θεωρήσουμε πλέγμα κατάλληλου μεγέθους, ανάλογου με τον παράγοντα προσέγγισης ϵ.

Φθάνοντας ένα βήμα πλέον πριν τον ακριβή ορισμό της **PPAD** αξίζει να θυμηθούμε την απόδειξη ύπαρξης τρι-χρωματικών τριγώνων στο πλέγμα του Sperner. Σύμφωνα με τον κανόνα τον οποίο ορίσαμε για τον περίπατο μεταξύ των τριγώνων, θεωρούμε έναν βοηθητικό γράφο, στον οποίο και αντιστοιχούμε τα τρίγωνα με κόμβους και τη δυνατότητα μετάβασης από ένα τρίγωνο σε

[4] Σημειώνουμε ότι για παίγνια δύο παικτών, όπως έχει αποδειχθεί από τον John von Neumann, οι τιμές των μεταβλητών σε κατάσταση ισορροπίας είναι πάντα ρητές. Έτσι, για αυτά τα παίγνια μπορούμε και να μην χρησιμοποιήσουμε τον παράγοντα προσέγγισης ϵ.

άλλο με ακμή. Ο γράφος που προκύπτει και που φανερώνει την πολυπλοκότητα του προβλήματος αναζήτησης θα αποτελείται από μεμονωμένους κόμβους, απλά μονοπάτια μεταξύ κόμβων και από κύκλους, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 32.10: Η μορφή του γράφου αναζήτησης του προβλήματος `SPERNER`.

Ορισμός 32.36 *Ένα πρόβλημα Π ανήκει στην κλάση* **PPAD** *αν οι λύσεις είναι πολυωνυμικά φραγμένες ως προς το μήκος της εισόδου, και υπάρχουν αλγόριθμοι πολυωνυμικού χρόνου για τα επόμενα:*

1. *Δοθείσης συμβολοσειράς I, έλεγξε αν το I είναι στιγμιότυπο του Π, και αν ναι υπολόγισε μια αρχική λύση $s_0 \in Sol(I)$.*

2. *Δοθέντων I, s, έλεγξε αν $s \in S(I)$, και αν ναι, επίστρεψε μία λύση $pred(s) \in Sol(I)$, τέτοια ώστε $pred(s_0) = s_0$.*

3. *Δοθέντων I, s, έλεγξε αν $s \in S(I)$, και αν ναι, επίστρεψε μία λύση $succ(s) \in Sol(I)$, τέτοια ώστε $succ(s_0) \neq s_0$ και $pred(succ(s_0)) = s_0$.*

Όπως και στην περίπτωση της **PLS**, από τον ορισμό της **PPAD** επάγεται ένας κατευθυνόμενος γράφος $G(Sol(I), E)$, όπου οι κορυφές είναι οι εφικτές λύσεις, και $E = \{(u, v) : \ u \neq v, succ(u) = v, pred(v) = u\}$.

Η διαδικασία που περιγράφεται από τον ορισμό της κλάσης αφορά την εύρεση μίας λύσης s, εκτός της s_0, που να έχει $indegree(s) + outdegree(s) = 1$, ακολουθώντας το μονοπάτι στον G που έχει αρχή το s_0. Επειδή για το s_0 ισχύει ότι $indegree(s_0) + outdegree(s_0) = 1$, θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία λύση $s \neq s_0$, λόγω του γνωστού λήμματος:

"Κάθε γράφος έχει άρτιο αριθμό κόμβων περιττού βαθμού."

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό, ότι η δομή του γράφου που επάγεται από τον ορισμό της **PPAD** και των συναρτήσεων $succ(u)$ και $pred(u)$ είναι ακριβώς ίδια με τη μορφή του γράφου αναζήτησης του προβλήματος `SPERNER`. Το γεγονός αυτό, κάθε άλλο παρά τυχαίο είναι, αφού πράγματι `SPERNER` $\in$ **PPAD**. Επιπλέον, λόγω της αλληλουχίας των αναγωγών που περιγράψαμε, ισχύει ότι `BROUWER` $\in$ **PPAD** και `NASH` $\in$ **PPAD**. Στην πρόσφατη εργασία του "The Complexity of Computing a Nash Equilibrium", οι Daskalakis, Goldberg και Papadimitriou έδειξαν ότι το πρόβλημα `NASH` για τρεις παίκτες είναι **PPAD**-complete.

Τα επόμενα προβλήματα είναι **PPAD**-πλήρη: `END OF THE LINE`, `SPERNER`, `NASH`.

Πολυπλοκότητα εύρεσης MNE

- Είδαμε, ότι η εύρεση MNE σε πεπερασμένα παίγνια, ανήκει στην PPAD. Όμως πόσο δύσκολη είναι;

- Οι Daskalakis, Goldberg, Papadimitriou (2006) έδειξαν ότι και τα τρία παραπάνω προβλήματα (SPERNER, BROUWER, NASH) είναι PPAD-πλήρη.

- Επιπλέον, από Chen, Deng, Teng (2009) ο υπολογισμός ακριβών ισορροπιών NASH σε bimatrix games είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα.

- Αν δεχθούμε την υπόθεση, ότι τα παραπάνω προβλήματα δεν λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο, τι σημαίνει αυτό, για την ερμηνεία των ισορροπιών NASH ως συμπεριφορά φυσικών παικτών;

32.7 Άλλες Κλάσεις

Χρησιμοποιώντας διάφορα λήμματα μπορούμε να ορίσουμε και άλλες κλάσεις:

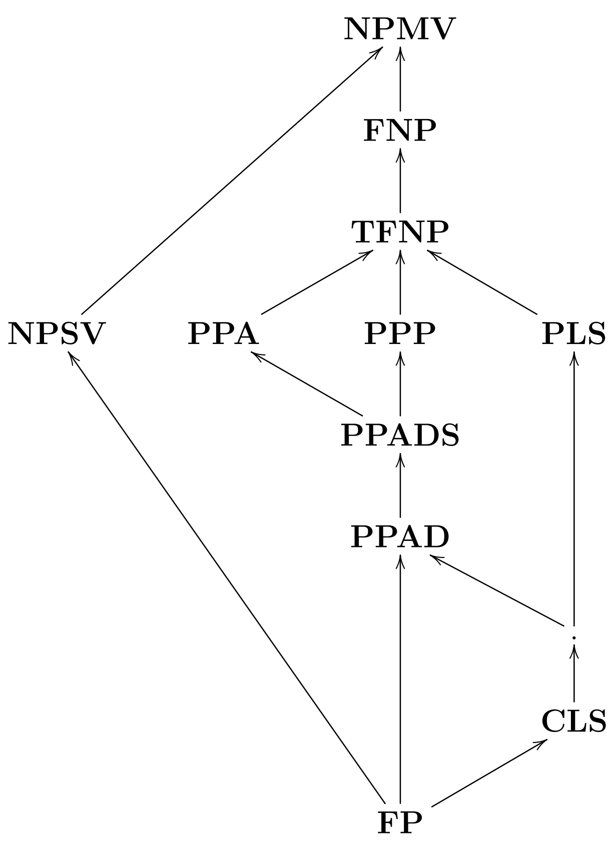
- **PPADS**: Παρόμοια με την **PPAD**, μόνο που σε αυτή την περίπτωση αναζητούμε μία καταβόθρα (sink), δηλαδή λύση με $indegree = 1$ και $outdegree = 0$.

- **PPA**: Το ανάλογο της **PPAD**, αλλά με μη κατευθυνόμενο γράφο (δεν υπάρχουν συναρτήσεις $succ$ και $pred$, αλλά μία συνάρτηση γειτονίας).

- **PPP**: Σε αυτή την κλάση ορίζεται μία συνάρτηση f στο σύνολο των λύσεων: Στόχος μας είναι να βρούμε είτε μία λύση που απεικονίζεται στην αρχική λύση, είτε δύο λύσεις y και y', τέτοιες ώστε $f(x, y) = f(x, y')$. Τέτοιες λύσεις υπάρχουν πάντα λόγω της Αρχής του Περιστερεώνα (*Polynomial Pingeonhole Principle*).

- **CLS**: Το ανάλογο της **PLS** για συνεχείς χώρους και συναρτήσεις (Continuous Local Search). Η κλάση **CLS** περιέχει τα προβλήματα αναζήτησης προσεγγιστικού τοπικού βέλτιστου μιας συνεχούς συνάρτησης, με την βοήθεια ενός μαντείου f, όπου και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Η συνολική σχέση εγκλεισμού φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Bιβλιογραφία

Bibliography

[W. Michiels, E.H.L. Aarts, and J.H.M. Korst] W. Michiels, E.H.L. Aarts, and J.H.M.Korst *Theoretical aspects of local search.* Springer, 2007.

[S. Parsons] S. Parsons. Algorithmic Game Theory by noam nisan, tim roughgarden, eva tardos and vijay v. vazirani. *Cambridge university press, 2011*

[A.A. Schaffer and M. Yannakakis] A.A. Schaffer and M. Yannakakis. Simple local search problems that are hard to solve *SIAM J, 1991*

[C Daskalakis, PW Goldberg, CH Papadimitriou] Daskalakis, PW Goldberg, CH Papadimitriou. The complexity of computing a Nash equilibrium *SIAM J on Computing 39(1), 2009*

[A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar] A. Fabrikant, C.H. Papadimitriou, and K. Talwar. The complexity of pure nash equilibria *In Proceedings of the 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Chicago, IL, USA, June13-16,2004, pages604-612, 2004.*