Κεφάλαιο 1

Παραμετρική Πολυπλοκότητα

Η Θεωρία Πολυπλοκότητας, όπως την έχουμε δει μέχρι τώρα, αποτελεί πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης ως προς το μήκος της εισόδου. Η παραμετρική προσέγγιση βασίζεται στην παραδοχή πως κάθε είσοδος από τον 'πραγματικό κόσμο', έχει κάποια δομή την οποία γνωρίζουμε εξαιτίας της φύσης του προβλήματος και συνεπώς μπορούμε να την εκμεταλλευτούμε.

Η θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας (Parameterized Complexity), που θα αναπτύξουμε συνοπτικά εδώ, εκμεταλλεύεται δομικές ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων που δίνουμε ως είσοδο, θεωρώντας τις παραμέτρους του προβλήματος. Τέτοιες παράμετροι μπορεί να είναι είτε προφανή μεγέθη (όπως μέγιστος βαθμός κορυφής, μέγιστος αριθμός ψηφίων) είτε πιο περίπλοκες κατασκευές που δεν μπορούν να ελεγθούν 'με το μάτι' όπως δενδροπλάτος, rank πίνακα κ.ά. Στη γενική περίπτωση η παράμετρος μπορεί να είναι οτιδήποτε μέσα στο λεξιλόγιο μας, συνήθως όμως είναι ένας φυσικός αριθμός.

Μέχρι τώρα είδαμε τρόπους να αντιμετωπίσουμε την NP-Completenes μέσω προσεγγίσεων ή πιθανοτικών αλγορίθμων. Οι παραμετρικοί αλγόριθμοι δίνουν πάντα σωστό αποτέλεσμα σε αποδοτικό χρόνο, αλλά μόνο για ένα τμήμα των στιγμιοτύπων του προβλήματος. Αυτό σημαίνει πως θα υπάρχουν στυγμιότυπα που θεωρώντας φραγμένη την επιλεγμένη παράμετρο αναγκαστικά δεν αναλογιζόμαστε. Κατασκευάζοντας έναν παραμετρικό αλγόριθμο και δίνοντάς του σαν είσοδο ένα απο αυτά, η χρονική πολυπλοκότητα δεν αλλάζει από εκείνη του απλού αλγορίθμου.

Θα δούμε παρακάτω τις διάφορες κλάσεις πολυπλοκότητας που προκύπτουν σε αυτή τη συζήτηση. Σε αυτές τις κλάσεις πλέον δεν θα κατατάσσουμε σκέτα προβλήματα. αλλά ζεύγη προβλημάτων και παραμέτρων. Ανάλογα με την επιλεγμένη παράμετρο ένα πρόβλημα μπορεί να βρεθεί σε διαφορετική κλάση. Είναι σημαντικό λοιπόν η παράμετρος που θα επιλεγεί για ένα πρόβλημα να αντιστοιχεί σε όσο γίνεται περισσότερα στιγμιότυπα και ταυτόχρονα να το κατατάσσει στις πιο 'αποδοτικέσ' κατηγορίες.

Ορισμός 1.1 *Μια παραμετροποίηση του* Σ^* *είναι μία αναδρομική συνάρτηση* $k : \Sigma^* \to \mathbb{N}$. *Ένα παραμετρικό πρόβλημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος* (L, k), *όπου* $L \subseteq \Sigma^*$ *και* k *είναι μία παραμετροποίηση του* Σ^*.

Ένας αλγόριθμος A *είναι* FPT*-αλγόριθμος (Fixed Parameter Tractable) ως προς την παράμετρο* k, *αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση* f *και πολυώνυμο* p, *τέτοια ώστε για κάθε* $x \in \Sigma^*$, *ο αλγόριθμος* A *να αποφασίζει το πρόβλημα σε χρόνο* $O(f(k(x)) \cdot p(|x|))$.

Ορισμός 1.2 *Ορίζουμε ως* **FPT** *την κλάση των παραμετρικών προβλημάτων που επιλύονται από έναν* FPT*-αλγόριθμο.*

Το επόμενο βήμα, κατ΄ αναλογία με την κλασσική Θεωρία Πολυπλοκότητας, είναι να συνδέσουμε τα προβλήματα μέσω αναγωγών:

Ορισμός 1.3 *Έστω* (L, k), (L', k') *παραμετρικά προβλήματα. Το* (L, k) *ανάγεται στο* (L', k') *μέσω* FPT*-αναγωγής (συμβ.* $L \leq_{FPT} L'$*) αν υπάρχει αλγόριθμος* R *τέτοιος ώστε:*

1. *Για κάθε* $x \in \Sigma^*$, $x \in L \Leftrightarrow R(x) \in L'$
2. *Η* R *υπολογίζεται από έναν* FPT*-αλγόριθμο.*
3. $k' = g(k)$, *όπου* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *υπολογίσιμη συνάρτηση.*

Αν $A \leq_{FPT} B$ *και* $B \leq_{FPT} A$, *τότε λέμε ότι τα* A, B *είναι* FPT*-ισοδύναμα (συμβ.* $A \equiv_{FPT} B$*).*

Παράδειγμα 1.1 *Έστω το πρόβλημα* `pSAT`, *όπου μας δίνεται μία προτασιακή φόρμουλα* ϕ, *και μία παράμετρος* k, *που αναπαριστά τον αριθμό των μεταβλητών στην* ϕ. *Είναι η* ϕ *ικανοποιήσιμη;*

Παράδειγμα 1.2 *Έστω το πρόβλημα* `pSAT`, *όπου μας δίνεται μία προτασιακή φόρμουλα* ϕ, *και μία παράμετρος* k, *που αναπαριστά τον αριθμό των clauses στην* ϕ. *Είναι η* ϕ *ικανοποιήσιμη;*

Άσκηση 1.1 *Δείξτε ότι το* `pSAT` *του παραδείγματος 33.2 είναι στο* **FPT**.

Όπως παρατηρούμε από το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε πολύ εύκολα να διαλέξουμε μια παράμετρο που να κατατάσσει το αντίστοιχο πρόβλημα στο FPT. Θα μπορούσε κανείς να επιλέξει την παράμετρο να είναι το μέγεθος της εσόδου -1 . Αυτό δεν το εμποδίζει ο ορισμός αυστηρά. Όμως ο στόχος εδώ είναι να παραδεχτούμε πως ρεαλιστικά τα περισσότερα στιγμιότυπα του προβλήματος έχουν αυτή την παράμετρο όντος μικρή. Προφανώς δεν μπορούμε να ισχυριστούμε κάτι τέτοιο για τα παραπάνω παραδείγματα.

Θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το παραμετρικό ανάλογο της κλάσης **NP**:

Ορισμός 1.4 *Έστω (L, k) παραμετρικό πρόβλημα. Το (L, k) ανήκει στην κλάση* **paraNP** *αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, πολυώνυμο p και* μη-ντετερμινιστικός *αλγόριθμος που για κάθε $x \in \Sigma^*$, αποφασίζει το πρόβλημα σε χρόνο $O(f(k(x)) \cdot p(|x|))$.*

Λέμε ότι ένα παραμετρικό πρόβλημα είναι τετριμμένο, αν $L = \emptyset$ ή $L = \Sigma^*$, και ορίζουμε την i-οστή φέτα του προβλήματος (L, k) ως το πρόβλημα:

$$(L, k)_i = \{x \in L | k(x) = i\}$$

Ισχύει ο παρακάτω χαρακτηρισμός της κλάσης **paraNP**:

Θεώρημα 1.1 *Έστω $(L, k) \in$* **paraNP** *ένα μη-τετριμμένο παραμετρικό πρόβλημα. Τότε η ένωση πεπερασμένων φετών του (L, k) είναι* **NP**-*complete* ανν *το (L, k) είναι* **paraNP**-*complete.*

Θα ορίσουμε και το παραμετρικό ανάλογο της κλάσης **EXP**:

Ορισμός 1.5 *Έστω (L, k) παραμετρικό πρόβλημα. Το (L, k) ανήκει στην κλάση* **XP** *αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση f, και αλγόριθμος A τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$, αποφασίζει το πρόβλημα σε χρόνο $O(|x|^{f(k(x))})$.*

Ισχύει ότι **FPT** $\subset$ **XP**, ενώ είναι άγνωστη η σχέση της **paraNP** με την **XP**.

Ορισμός 1.6 *Μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing M καλείται k-*περιορισμένη *αν υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και ένα πολυώνυμο p τέτοια ώστε η M να χρειάζεται $f(k(x)) \cdot p(|x|)$* υπολογιστικά *βήματα, και το* πολύ *$g(k(x)) \cdot \log |x|$ να είναι μη-ντετερμινιστικά.*

Ορισμός 1.7 *Ορίζουμε την κλάση* **W[P]** *να περιέχει όλα τα παραμετρικά προβλήματα (L, k) που αποφασίζονται από k-περιορισμένες μηχανές Turing.*

Τα περισσότερα **NP**-complete προβλήματα παραμετροποιημένα ώστε να *μην* ανήκουν στο **FPT**, ανήκουν στο **W[P]**.
Ισχύει η σχέση εγκλεισμού: **FPT** $\subseteq$ **W[P]** $\subseteq$ **XP** $\cap$ **paraNP**.

Οι παραπάνω κλάσεις πέρα απο την FPT ωστόσο έχουν πιο πολύ θεωρητική σημασία. Τα περισσότερα παραμετροποιημένα προβλήματα κατατάσσονται είτε στην FPT είτε σε κάποιο επίπεδο της W-hierarchy την οποία θα ορίσουμε παρακάτω.

1.1 W-hierarchy

Για να ξεκινήσουμε να μιλάμε για την W-hierarchy θα πρέπει να αλλάξουμε μοντέλο. Παρόλο που υπάρχει ορισμός του πρώτου επιπέδου μέσω μηχανών Turing για την W[1] δεν είναι εύκολα γενικεύσιμος και πολύ λιγότερο διαισθητικός.

Θα χρησημοποιήσουμε εδώ λογικά κυκλώματα Απόφασης. Ένα κύκλωμα C_n αντιστοιχεί σε μέγεθος εισόδου n και η ένωση $\forall n$ αντιστοιχεί στην οικογένεια κυκλωμάτων που λύνει ένα πρόβλημα. Για εξάσκηση μπορεί να σκεφτεί κανείς το κύκλωμα που αντιστοιχεί σε ένα 3CNF πρόβλημα.

Ορισμός 1.8 *Θα ορίσουμε σαν το Weft του κυκλώματος να είναι ο μέγιστος αριθμός μεγάλων πυλών πάνω σε οποιοδήποτε μονοπάτι από κάποιο κόμβο εισόδου μέχρι τον κόμβο εξόδου. Μία πύλη καλείται μεγάλη αν ο αριθμός εισόδων της είναι μεγαλύτερος απο μια ορισμένη σταθερά. (Η συγκεριμένη τιμή της σταθεράς δεν έχει σημασία)*

Παρακάτω δίνουμε ένα κύκλωμα όπου οι μεγάλες πύλες αναπαριστούνται με διπλό κύκλο και έχουν τη δυνατότητα να δεχθούν παραπάνω εισόδους από ότι οι απλές.

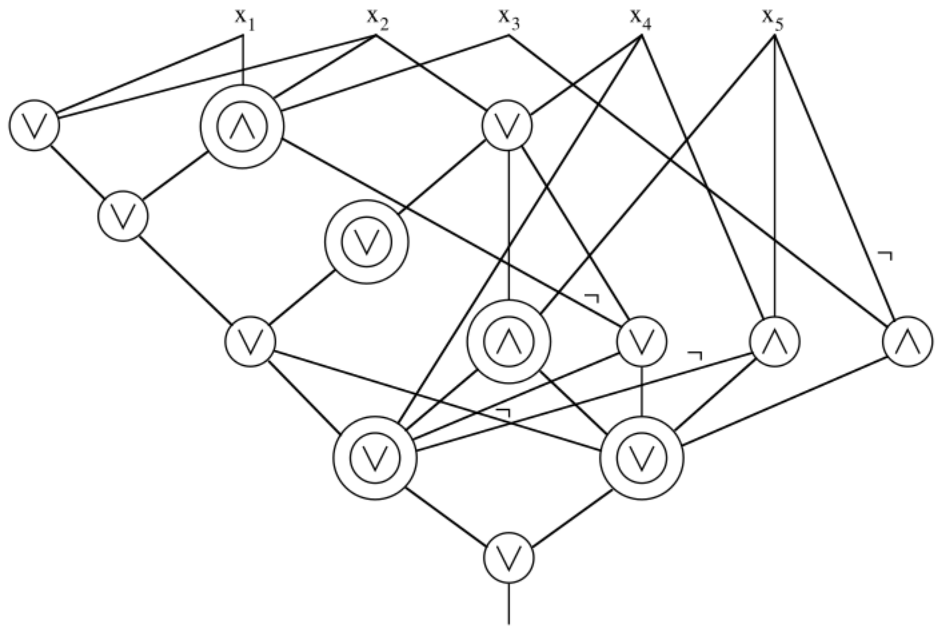
Παράδειγμα 1.3 *Για την 3CNF μορφή που αναλογιστήκαμε πριν αρκεί πάντα ένα κύκλωμα που συνδέει όλες τις μεταβλητές εισόδου με το αντίστοιχο clause το οποίο αντιστοιχεί σε μια πύλη OR και έπειτα μια 'μεγάλη' πύλη AND που συνδέει όλες τις προηγούμενες.*

Εδώ φαίνεται πως χρειαζόμαστε μόνο μία μεγάλη πύλη για να λύσουμε οποιαδήποτε kCNF. Θα δούμε αμέσως πως αυτή η προσέγγιση ορίζει με φυσικό τρόπο την W-hierarchy μέσω κανονικοποιημένων SAT και των αντίστοιχων κυκλωμάτων.

Ορισμός 1.9 *Πρόβλημα: WEIGHTED WEFT t DEPTH h CIRCUIT SATISFIABILITY (WCS(t, h))*
Είσοδος : Ενα κύκλωμα C βάθους h και weft t
Παράμετρος: Ένας θετικός ακέραιος k
Έξοδος: Ναι, αν το κύκλωμα C έχει απονομή αλήθειας βάρους k . Όχι, αλλιώς.

Θα σημειώνουμε την γλώσσα που σχετίζεται με την παραπάνω οικογένεια κυκλωμάτων σαν $L_F(h,t)$.

Ορισμός 1.10 *θα λέμε για μία γλώσσα L πως ανήκει στην W[t] αν είναι FPT-reducible στην γλώσσα $L_F(h,t)$ για κάποιο h.*



Σχήμα 1.1: Ένα κύκλωμα weft 2 βάθους 5.

Αντίστοιχα για κανένα περιορισμό στο Weft προκύπτει η κλάση W[P] .

Παρόλο που η FPT είναι μια αρκετά δυνατή κλάση χάρη στην ελευθερία των παραμέτρων η W[1]-hardness δεν είναι κάτι το οποίο συναντάμε σπάνια. Αυτό οφείλεται στο ότι για ενα πολύ μεγάλο τμήμα προβλημάτων (αυτά της βελτιστοποίησης) συνήθως δεχόμαστε σαν παράμετρο το μέγεθος της λύσης. Με την συγκεκριμένη παράμετρο λοιπόν πολλά προβλήματα προκύπτουν W[1]-hard

Τέλος παραθέτουμε ένα ανάλογο του θεωρήματος του Cook για παραμετρικά προβλήματα.

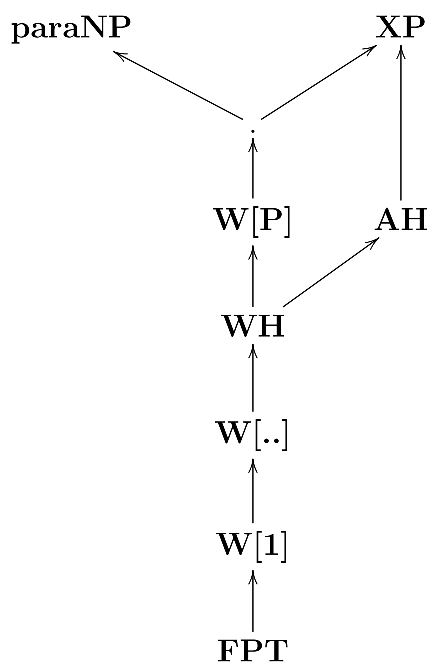
Θεώρημα 1.2 *Για την κλάση W[1] τα παρακάτω προβλήματα είναι complete:*

- *Weighted n-SAT* $\forall$ *fixed* $n \geq 2$
- *Short Turing Machine Acceptance*

Οπου το δεύτερο αντιστοιχεί στην παραμετρική εκδοχή του Turing Machine Acceptance με παράμετρο τα k βήματα.

Η παρούσα κατάσταση μεταξύ των επιπέδων της W-hierarchy είναι
$\mathbf{W[0] = FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq ... \subseteq W[P] \subseteq XP}$

Η σχέση εγκλεισμού θεωρείται γνήσια υπό την ETH (Exponential time Hypothesis) η οποία ισχυρίζεται πως δεν υπάρχει αλγόριθμος πέρα από τον εκθετικό για την επίλυση του **SAT** και είναι πιο ισχυρή από την υπόθεση P $\neq$ NP



Παρατήρηση: *Την κλάση* **AH** *(A-Hierarchy) μπορείτε να την αναζητήσετε στο διαδίκτυο.*