Παίγνια Συμφόρησης και Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων

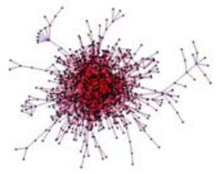
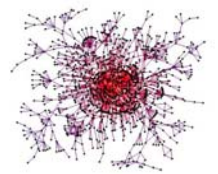
Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και
Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Πολύπλοκα Συστήματα

- … αποτελούνται από πολλές (ετερογενείς) συνιστώσες που αλληλεπιδρούν.
- Συμπεριφορά συστήματος δεν συνάγεται από χαρακτηριστικά συνιστωσών.
- Συμπεριφορά εξαρτάται **κυρίως** από αλληλεπίδραση συνιστωσών και δεν είναι εύκολο να προβλεφθεί.

Παραδείγματα

- Φυσική (phase transitions, symmetry breaking, self organization, …).
- Βιολογία και Εξελικτική Βιολογία (εξέλιξη ειδών).
- Οικονομικά
  - Παγκόσμια Οικονομία: ανεξάρτητες οντότητες αλληλεπιδρούν με στόχο μεγιστοποίηση κέρδους.
- Κοινωνιολογία
  - «Μικρός κόσμος»: διάμετρος ΗΠΑ = 6, [Kleinberg, Nature 00].
- Μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα (χαοτική συμπεριφορά).

… στην Πληροφορική

- Internet – Web (όχι ιεραρχικός σχεδιασμός αλλά «άναρχη» ανάπτυξη από αυτόνομες οντότητες).
- Κατανεμημένα συστήματα.
- Agents, P2P systems, sensor networks, …
- Διάδοση και αντιμετώπιση ιών.
- Ευρετικές τεχνικές
  - Γενετικοί αλγόριθμοι, simulated annealing, …
- Αυτο-οργάνωση, εξέλιξη, προσαρμογή, …

Αναγκαιότητα

- Μεγάλα, πολύπλοκα, και δυναμικά μεταβαλλόμενα συστήματα αποτελούν τμήμα τεχνολογικής υποδομής.
- Αδύνατο να υπάρξει κεντρική διαχειριστική αρχή που εξασφαλίζει βέλτιστη λειτουργία.
  - Συνιστώσες ενεργούν αυτόνομα και «εγωιστικά» με κριτήριο τη βελτιστοποίηση «ατομικών» αντικειμενικών στόχων.
- Κλασσικά παραδείγματα:
  - Κυκλοφορία στις μεγάλες πόλεις.
  - Δρομολόγηση κυκλοφορίας στο Internet.

Πλαίσιο Μελέτης

- Η πολυπλοκότητα είναι πηγή πολλών δυνατοτήτων!
  - Δυναμικά συστήματα, αυτο-οργάνωση, ποικιλία συμπεριφορών, εξέλιξη, προσαρμογή, …
  - Χαοτική συμπεριφορά, αστάθεια, μη-ισορροπία, ...
- Πρόκληση: κατανόηση και εξαγωγή επιθυμητής συμπεριφοράς.
- Θα εστιάσουμε σε παίγνια συμφόρησης (congestion games).
  - Μοντέλο για ανταγωνιστική / εγωιστική ανάθεση πόρων σε «πολύπλοκα συστήματα».

Μονόδρομος Ύποπτου

- Συλλαμβάνεται ύποπτος για μεγάλη ληστεία. Δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία!
  - Ομολογεί: 5 χρόνια φυλακή.
  - Δεν ομολογεί: 1 χρόνο φυλακή.
- Ο ύποπτος δεν ομολογεί.

Δίλημμα Υπόπτων

- Συλλαμβάνονται δύο συνεργάτες για μεγάλη ληστεία.
  - Κρατούνται σε χωριστά κελιά χωρίς επικοινωνία.

	Ομολογεί Β	Δεν ομολογεί Β
Ομολογεί Α	**5, 5**	**0, 15**
Δεν ομολογεί Α	**15, 0**	**1, 1**

- Αμφότεροι οι ύποπτοι **ομολογούν!**

Θεωρία Παιγνίων

- Μελετά συμπεριφορά αυτόνομων οντοτήτων που δρουν με στόχο βελτιστοποίηση ατομικών στόχων.
  - Λογική συμπεριφορά.
  - Στρατηγική συμπεριφορά.
- Εργαλείο για μελέτη πολύπλοκων συστημάτων.
  - Παίγνια συμφόρησης: ανταγωνιστική ανάθεση πόρων.
- Περιοχή εφαρμογής (πολυπλοκότητα υπολογισμού σημείων ισορροπίας).
  - Αν υπερ-υπολογιστής δεν υπολογίζει σημείο ισορροπίας, πως μπορούν οι παίκτες;

Ανταγωνιστικό Παίγνιο

- Σύνολο παικτών που ανταγωνίζονται για πόρους.
- Κάθε παίκτης αποφασίζει μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Μοναδικός στόχος: ελαχιστοποίηση ατομικού κόστους.
- Ατομικό κόστος εξαρτάται από στρατηγικές όλων.
- **Ισορροπία Nash:** Κανένας δεν βελτιώνει ατομικό κόστος αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική.
  - Nash (1952) απέδειξε ότι **πάντα** υπάρχει τέτοια ισορροπία (αλλά μπορεί να είναι πεπλεγμένη – mixed).
  - Ισορροπία Nash αποτελεί «λύση» του συστήματος:
    - Αν οι παίκτες συμπεριφερθούν στρατηγικά και λογικά και έχουν στη διάθεσή τους πλήρη γνώση και επαρκή χρόνο, τότε καταλήγουν σε μία ισορροπία Nash.

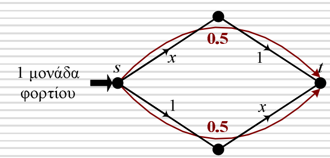
Ισορροπία Nash

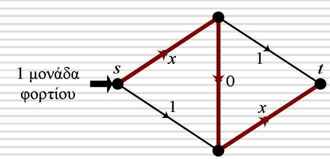
	Ομολογεί Β	Δεν ομολογεί Β
Ομολογεί Α	**5, 5**	**0, 15**
Δεν ομολογεί Α	**15, 0**	**1, 1**

- Ισορροπία Nash **δεν βελτιστοποιεί** συνολικό αποτέλεσμα. Συμβιβασμός με δεδομένη την έλλειψη συντονισμού.

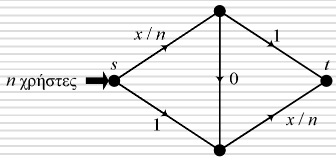
Παράδοξο Braess

- Συνολική καθυστέρηση **1.5**
  - Nash ισορροπία αποτελεί βέλτιστη λύση.
- Νέα εξαιρετικά γρήγορη σύνδεση.
- Συνολική καθυστέρηση αυξάνεται σε **2** γιατί όλοι χρησιμοποιούν την γρήγορη σύνδεση.
- Παραδοσιακός σχεδιασμός δεν επαρκεί για πολύπλοκα συστήματα.





Ανταγωνιστική Ανάθεση Πόρων



- Μοντελοποίηση με παίγνια συμφόρησης.
- Ανάλυση απόδοσης.
  - Τίμημα αναρχίας: Υποβάθμιση λόγω ιδιοτελούς και ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε σχέση με βέλτιστη κεντρικοποιημένη διαχείριση.
- Κίνητρα για βελτίωση απόδοσης.
- Τεχνικές για βέλτιστο σχεδιασμό.

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- Σύνολο πόρων $E = \{ e_1, \ldots, e_m \}$.
  - Πόροι: συνδέσεις δικτύου, υπηρεσίες σε υπολογιστικό ή πληροφοριακό σύστημα, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
- n χρήστες με απαιτήσεις πρόσβασης σε πόρους.
  - Απαιτήσεις εισάγουν ίδιο (μοναδιαίο) φορτίο.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο επιλογών (αμιγών στρατηγικών) παίκτη i.
  - Παίκτης i κάνει επιλογή $\sigma_i \in \Sigma_i$.
  - Διάνυσμα επιλογών $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ διαμόρφωση συστήματος.
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

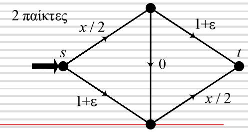
- «Ποιότητα» πόρου υποβαθμίζεται όσο αυξάνεται φορτίο.
  - Φορτίο (ή συμφόρηση) σ_e πόρου e σε διαμόρφωση σ.
    σ_e = #χρηστών που χρησιμοποιούν e στη σ.
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) πόρου e με συμφόρηση x: $d_e(x)$
  - Καθυστέρηση σε κάθε πόρο αυξάνεται με συμφόρηση!
- Καθυστέρηση παίκτη i σε διαμορφ. σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e \in \sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$
    $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$

Μοντέλο Ανάθεσης Πόρων

- Μέτρο αποδοτικότητας διαμόρφωσης σ αποτελεί η συνολική καθυστέρηση των χρηστών:

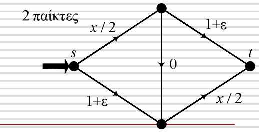
$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$$

  - Βέλτιστη διαμόρφωση σ^* ελαχιστοποιεί συνολική καθυστέρηση.
  - Συστήματα μικρής κλίμακας με κεντρική διαχείριση (υπολογιστικά συστήματα με λίγους χρήστες), η βέλτιστη διαμόρφωση σ^* επιβάλλεται στους χρήστες.
  - Συνολική καθυστέρηση: έννοια «κοινωνικού» κόστους.



Παίγνια Συμφόρησης

- Παίγνιο συμφόρησης $\Gamma(N, E, (\Sigma_i)_{i\in N}, (d_e)_{e\in E})$
  - N : σύνολο n χρηστών (ανταγωνιστικών οντοτήτων)
  - E : σύνολο m πόρων διαμοιραζόμενων από χρήστες.
  - $\Sigma_i \subseteq 2^E$ σύνολο αμιγών στρατηγικών χρήστη i.
    - $\Sigma_i = \Sigma_j, \forall i, j$: συμμετρικό παίγνιο.
    - Σύνολο στρατηγικών (διαμορφώσεων) $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$
    - σ_i συμβολίζει στρατηγική χρήστη i σε διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$.
  - Διαμόρφωση $\sigma \in \Sigma$ προκαλεί συμφόρηση σ_e σε πόρο $e \in \Sigma$.
    σ_e = #χρηστών που χρησιμοποιούν e στη σ:
    $$\sigma_e = |\{i \in N : e \in \sigma_i\}|$$
  - Αύξουσα συνάρτηση καθυστέρησης (ή κόστους) σε πόρο e : $d_e : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+$



Παίγνια Συμφόρησης

- Χρήστες ενδιαφέρονται για καθυστέρηση στρατηγικής τους δεδομένων στρατηγικών υπολοίπων χρηστών.
  - σ^{-i} : διαμόρφωση από στρατηγικές χρηστών εκτός του i.
  - Κόστος χρήστη i σε διαμόρφωση σ: $c_i(\sigma) = \sum_{e\in\sigma_i} d_e(\sigma_e)$
  - Κόστος στρατηγικής $p \in \Sigma_i$ (χρήστη i) σε διαμόρφωση σ^{-i}:
    $$c_i(\sigma^{-i}, p) = \sum_{e\in p} d_e(\sigma_e^{-i} + 1)$$
  - **Βέλτιστη απόκριση** χρήστη i σε διαμόρφωση σ^{-i}: στρατηγική $p^*(\sigma^{-i}) \in \Sigma_i$ με ελάχιστο κόστος.
- Διαμόρφωση σ είναι αμιγής ισορροπία Nash αν
  - $\forall$χρήστη i, σ_i αποτελεί βέλτιστη απόκριση σε σ^{-i}.
  - Κανένας χρήστης δεν μπορεί να μειώσει την ατομική του καθυστέρηση αλλάζοντας τη στρατηγική του.

Παραδείγματα – Εφαρμογές

- Παίγνια συμφόρησης: γενικό μοντέλο – πλήθος εφαρμογών!
  - Πόροι: συνδέσεις δικτύου, αρχεία (ή τμήματα αρχείων) P2P, …
  - Στρατηγικές: Σύνολα πόρων για ικανοποίηση στόχου.
- Παραδείγματα:
  - n = 2, δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = x / 2$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
  - Δύο «παράλληλοι» πόροι με $d_1(x) = (x/n)^k$, $d_2(x) = 1+\varepsilon$.
  - $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$
    $\forall e \in E$, κόστος e : $d_e(x) = x$
    - Ισορροπίες: $(\{s_1, p_1\}, \{s_2, p_2\}, \{s_3, p_3\})$
      $(\{s_2, s_3, p_1\}, \{s_3, s_1, p_2\}, \{s_1, s_2, p_3\})$

Ερευνητικές Κατευθύνσεις

- Ύπαρξη και δομή αμιγών ισορροπιών Nash για παίγνια συμφόρησης και γενικεύσεις τους.
- Ταχύτητα σύγκλισης σε αμιγείς ισορροπίες Nash.
  - Υπό ποιες προϋποθέσεις (π.χ. συντονισμός, γνώση, υπολογιστικοί πόροι) χρήστες συγκλίνουν γρήγορα σε ισορροπία Nash;
- Ποιότητα – απόδοση ισορροπιών Nash σε σχέση με βέλτιστη λύση.
  - Τίμημα αναρχίας, τίμημα σταθερότητας.
  - Μέθοδοι βελτίωσης τιμήματος αναρχίας: διόδια, πολιτικές Stackelberg, …
- Αντίστοιχα ερωτήματα για μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης βλ. [Roughgarden], [Vocking].

Συνάρτηση Δυναμικού

- «Κοινωνικό» κόστος χρηστών: $C(\sigma) = \sum_{e \in E} \sigma_e d_e(\sigma_e)$
- Ιδιοτελής συμπεριφορά μειώνει συνάρτηση δυναμικού:

  $$\Phi(\sigma) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{\sigma_e} d_e(j)$$

  - Όταν χρήστης i αλλάζει στρατηγική από p σε p', τότε:

    $$c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p') = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

    δηλ. μεταβολή κόστους χρήστη i = μεταβολή δυναμικού.
  - Ονομάζονται (ακριβείς) συναρτήσεις δυναμικού.
- σ (αμιγής) ισορροπία Nash ανν σ αποτελεί τοπικό ελάχιστο Φ [Rosenthal, 73].
  - Πολιτική **καλύτερων / βέλτιστων αποκρίσεων** οδηγεί σε αμιγή ισορροπία Nash.
  - Υπολογισμός ισορροπίας Nash ελαχιστοποιώντας δυναμικό.

Συνάρτηση Δυναμικού

- Ανταγωνιστικό παίγνιο με ακριβή συνάρτηση δυναμικού είναι ισομορφικό με κάποιο παίγνιο συμφόρησης [Monderer and Shapley, 96].
- Τι συμβαίνει όταν οι χρήστες έχουν διαφορετικά βάρη;
  - Χρήστες επιβαρύνουν διαφορετικά πόρους (αλλά όλους με ίδιο τρόπο / βάρος).
  - Βάρη χρηστών: $w_1, \ldots, w_n$
  - Φορτίο πόρου e σε διαμόρφωση σ: $\sigma_e = \sum_{i: e \in \sigma_i} w_i$
  - [Milchtaich, 96], [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04], …

Παίγνια Συμφόρησης με Βάρη

- Για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, $d_e(x) = a_e x + b_e$ υπάρχει συνάρτηση δυναμικού που λαμβάνει υπόψη τα βάρη [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

  $$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \left(a_e \sigma_e^2 + 2 b_e \sigma_e + a_e \sum_{i: e \in \sigma_i} w_i^2 \right)$$

  - Όταν χρήστης i αλλάζει στρατηγική από p σε p', τότε:

    $$w_i [c_i(\sigma^{-i}, p) - c_i(\sigma^{-i}, p')] = \Phi(\sigma^{-i}, p) - \Phi(\sigma^{-i}, p')$$

    (βάρος i) x (μεταβολή κόστους i) = μεταβολή δυναμικού.
  - Συνάρτηση δυναμικού με βάρη: γενικεύει Rosenthal.
- Για μη-γραμμικές συναρτήσεις, δεν υπάρχει συνάρτηση δυναμικού και μπορεί ούτε αμιγής ισορροπία Nash [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 04].

Δυναμικά και Ύπαρξη PNE

- Τι συμβαίνει όταν κάθε χρήστης βιώνει διαφορετική καθυστέρηση στον ίδιο πόρο (player-specific payoffs);
  - [Milchtaich, 96], [Monien et al], [Monderer, 06], …
- Υπάρχουν προσεγγιστικές συναρτήσεις δυναμικού για πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους;
- Strategy spaces που εγγυώνται ύπαρξη αμιγών ισορροπιών Nash ανεξάρτητα από συναρτήσεις κόστους;
  - Topological existence property [Monderer, 06].
- Τι συμβαίνει με συνασπισμούς χρηστών;
  - Συνασπισμός έχει βάρος (#χρηστών) που «σπάει» σε μοναδιαίους χρήστες.
  - [Hayrapetyan, Tardos, Wexler, 06], [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 06], [Monderer, 07], …

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Γενικά, μείωση δυναμικού και σύγκλιση σε ισορροπία μπορεί να είναι πολύ αργή (π.χ. εκθετικός #βημάτων).
- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε προσεγγιστική ισορροπία για συμμετρικά παίγνια με α-bounded jump,

  $$\forall e \in E, \forall x \geq 1,\ d_e(x+1) \leq \alpha d_e(x)$$

  - [Chien and Sinclair, 07].
  - Επέκταση για ετερογενείς συνασπισμούς χρηστών και γραμμικές συναρτήσεις [Fotakis, Sarigiannidis, Spirakis, 07].
- Διαμόρφωση σ είναι ε-ισορροπία αν

  $$\forall i \in N, \forall p \in \Sigma_i,\ (1-\varepsilon)c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma^{-i}, p)$$

  - δεν υπάρχει χρήστης με δυνατότητα σημαντικής βελτίωσης.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- $\Phi(\sigma) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) \leq n c_k(\sigma)$ όπου k ο χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
- Ενόσω σ όχι ε-ισορροπία, κινείται «ανικανοποίητος» χρήστης με μεγαλύτερο ατομικό κόστος στην σ.
  - Αν k «ανικανοποίητος», μείωση δυναμικού κατά:

    $$\Phi(\sigma) - \Phi(\sigma') = c_k(\sigma) - c_k(\sigma') > \varepsilon c_k(\sigma) \geq \frac{\varepsilon}{n}\Phi(\sigma)$$

  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n}{\varepsilon}\log\Phi(\sigma_0)$
  - Αν k «ικανοποιημένος» και κινείται χρήστης j, τότε λόγω συμμετρίας και α-bounded jump: $c_k(\sigma)/\alpha \leq c_j(\sigma)$
  - Σύγκλιση σε #βημάτων $\leq \frac{n\alpha}{\varepsilon}\log\Phi(\sigma_0)$
- Παρόμοια αποτελέσματα και για άλλα κριτήρια συντονισμού.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Γρήγορη συντονισμένη σύγκλιση σε ακριβείς ισορροπίες για συμμετρικά παίγνια με απλές τοπολογίες.
  - Series-parallel graphs [Fotakis, Kontogiannis, Spirakis, 05].
  - Παράλληλοι πόροι και matroids (και για μη-συμμετρικά παίγνια) [Ackerman, Roglin, Vocking, 06].
  - Extension-parallel graphs [Fotakis, 07].
- Τι συμβαίνει σε γραμμικά παίγνια συμφόρησης με βάρη (υπάρχει δυναμικό, δεν υπάρχει συμμετρία);
- Τι συμβαίνει σε μη-γραμμικά παίγνια συμφόρησης με συνασπισμούς χρηστών ή με βάρη;
  - Διατύπωση προσεγγιστικών συναρτήσεων δυναμικού.

Ταχύτητα Σύγκλισης

- Αν δεν υπάρχει συντονισμός ή / και συνολική γνώση;
  - Ταυτόχρονες μυωπικές κινήσεις χρηστών χωρίς συντονισμό.
  - Πρωτόκολλα που εξασφαλίζουν γρήγορη σύγκλιση.
  - Τυχαιότητα για σπάσιμο συμμετρίας.
  - [Fischer and Vocking] για μη-ατομικά παίγνια.
  - [Even-Dar and Mansour, 05] και [Berenbrink et al, 06] για παράλληλους πόρους και γραμμικές συναρτήσεις.
  - [Fotakis, Kaporis, Spirakis, 07] για παράλληλους πόρους και α-bounded jump συναρτήσεις.
  - Κεντρικό ερευνητικό θέμα για επόμενα 2-3 χρόνια.

Απόδοση – Τίμημα Αναρχίας

- Διαμόρφωση σ* ελάχιστου συνολικού κόστους και διαμόρφωση σ ισορροπία Nash:
  - Υπάρχουν πολλές ισορροπίες, θεωρούμε τη «χειρότερη».
  - **Τίμημα αναρχίας** = max{C(σ)/C(σ*)}, με σ ισορροπία Nash.
  - Μέτρο υποβάθμισης απόδοσης λόγω «ανταγωνιστικής» και «ιδιοτελούς» συμπεριφοράς.
  - Αν τίμημα αναρχίας μικρό, τότε ισορροπίες Nash ικανοποιούν και χρήστες και διαχειριστή συστήματος.
  - Θεωρούμε την «καλύτερη» ισορροπία Nash.
  - **Τίμημα σταθερότητας** = min{C(σ)/C(σ*)}, με σ ισορροπία Nash.
  - Διαχειριστής προτείνει διαμόρφωση. Αν άλλοι ακολουθήσουν, μεμονωμένος χρήστης δεν έχει καλύτερη επιλογή.

Γραμμικές Συναρτήσεις

- Θεωρούμε ταυτοτικές συναρτήσεις κόστους $d_e(x) = x$
  - Εύκολη γενίκευση σε γραμμικές συναρτήσεις $d_e(x) = a_e x + b_e$
  - Π.χ. $E = \{s_1, s_2, s_3, p_1, p_2, p_3\}$, n = 3.
    $\Sigma_1 = \{ \{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\} \}$
    $\Sigma_2 = \{ \{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\} \}$
    $\Sigma_3 = \{ \{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\} \}$
    Τίμημα αναρχίας ≥ 2.5
- Κάθε παίγνιο συμφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις κόστους, τίμημα αναρχίας ≤ 2.5
  [Christodoulou, Koutsoupias, 05], [Awerbuch, Azar, Epstein, 05]
  - Αντίστοιχα άνω φράγματα για παίγνια με βάρη, πολυωνυμικές συναρτήσεις κόστους, πεπλεγμένες στρατηγικές.
  - Πρόσφατα σημαντικά ισχυρότερο άνω φράγμα για παράλληλους πόρους και extension-parallel nets [Fotakis, 07].

Γραμμικές Συναρτήσεις

- Έστω σ ισορροπία Nash και σ* βέλτιστη λύση.
  Από ορισμούς ισορροπίας Nash και κόστους παικτών:

$$c_i(\sigma) \le c_i(\sigma^{-i}, \sigma_i^*) \Rightarrow \sum_{e \in \sigma^i} \sigma_e \le \sum_{e \in \sigma_i^*} (\sigma_e + 1)$$

  - Αθροίζουμε για όλους τους παίκτες και έχουμε το ζητούμενο:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in \sigma^i} \sigma_e \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{e \in \sigma_i^*} (\sigma_e + 1) \Rightarrow \quad \forall \text{φυσικούς } x, y, (x+1)y \le x^2/3 + 5y^2/3$$

$$\sum_{e \in E} (\sigma_e)^2 \le \sum_{e \in E} (\sigma_e + 1)\sigma_e^* \le \sum_{e \in E} [\tfrac{1}{3}(\sigma_e)^2 + \tfrac{5}{3}(\sigma_e^*)^2] \Rightarrow$$

$$C(\sigma) \le C(\sigma)/3 + 5C(\sigma^*)/3 \Rightarrow$$

$$C(\sigma) \le 5C(\sigma^*)/2$$

Μείωση Αναρχίας: «Διόδια»

- Μεταβολή συναρτήσεων κόστους προσθέτοντας σταθερό όρο - διόδια: $\bar{d}_e(x) = d_e(x) + t_e$
  - Ισορροπίες με «διόδια», αλλά κοινωνικό κόστος χωρίς!
  - Σημαντική μείωση τιμήματος αναρχίας.
  - Παράδειγμα με νέες συναρτήσεις κόστους (διόδια ε στους πόρους s_1, s_2, s_3):

$$\Sigma_1 = \{\{s_1, p_1\}, \{s_2, s_3, p_1\}\} \qquad \bar{d}_{p_j}(x) = x$$
$$\Sigma_2 = \{\{s_2, p_2\}, \{s_3, s_1, p_2\}\} \qquad \bar{d}_{s_j}(x) = x + \varepsilon$$
$$\Sigma_3 = \{\{s_3, p_3\}, \{s_1, s_2, p_3\}\}$$

  - Μείωση τιμήματος αναρχίας στο 1, αλλά
    - «Διόδια» πρέπει να αναδιανέμονται στους χρήστες (πώς;).
    - Επιβάρυνση παικτών (δεν υπολογίζεται στο κόστος!).

«Διόδια» σε Παράλληλους Πόρους

- Στρατηγικές μονοσύνολα (παράλληλοι πόροι) και συναρτήσεις γνήσια αύξουσες: «διόδια» μειώνουν τίμημα αναρχίας στο 1 [Caragiannis, Kanelopoulos, Kaklamanis, 06].
- Έστω «παράλληλοι» πόροι, και σ^* βέλτιστη διαμόρφωση.
  Θεωρούμε ότι $\sigma_e^* > 0$ για κάθε πόρο *e* (εύκολη γενίκευση).
  $$L = \max_{e:\sigma_e^*>0}\{d_e(\sigma_e^*)\} \qquad \overline{d}_e(x) = d_e(x) + [L - d_e(\sigma_e^*)]$$
- σ ισορροπία Nash (με «διόδια»): $\sigma_e = \sigma_e^*,\ \forall e \in E$
  Έστω ότι υπάρχουν $e^+, e^- \in E$ με $\sigma_{e^+} \geq \sigma_{e^+}^* + 1$ και $\sigma_{e^-}^* \geq \sigma_{e^-} + 1$
  Τότε, $d_{e^+}(\sigma_{e^+}) + L - d_{e^+}(\sigma_{e^+}^*) \leq d_{e^-}(\sigma_{e^-} + 1) + L - d_{e^-}(\sigma_{e^-}^*)$
  και $L < d_{e^+}(\sigma_{e^+}) + L - d_{e^+}(\sigma_{e^+}^*)$, αφού $\sigma_{e^+} > \sigma_{e^+}^*$
  και $\sigma_{e^-} + 1 \leq \sigma_{e^-}^*$, οπότε $d_{e^-}(\sigma_{e^-} + 1) + L - d_{e^-}(\sigma_{e^-}^*) \leq L$
  Αντίφαση!

Μείωση Αναρχίας: «Διόδια»

- «Διόδια» για τίμημα αναρχίας 2 σε γραμμικά παίγνια συμφόρησης [Caragiannis, Kanelopoulos, Kaklamanis, 06].
  - Κάτω φράγματα στο τίμημα αναρχίας με «διόδια» για μη-συμμετρικά παίγνια.
- Βέλτιστα «διόδια» για συμμετρικά παίγνια σε series-parallel graphs με γνήσια αύξουσες συναρτήσεις κόστους [Fotakis, Spirakis, 07].
- Υπάρχουν βέλτιστα «διόδια» για συμμετρικά παίγνια με αύξουσες συναρτήσεις;
- Τι συμβαίνει όταν οι χρήστες αποτιμούν «χρόνο» και «χρήμα» με διαφορετικό τρόπο.
  - Υπάρχουν βέλτιστα διόδια για μη-ατομικά παίγνια [Fleischer, Jain, Mahdian, 04], [Karakostas, Kolliopoulos, 04].

Πολιτικές Stackelberg

- *αn* χρήστες ακολουθούν οδηγίες «διαχειριστή».
  - Αλτρουιστές, υπάκουοι, πληρώνουν φθηνότερα, …
  - Μόνο (1 – *α*)*n* εγωιστές χρήστες φθάνουν σε ισορροπία Nash.
  - [Korilis, Lazar, Orda, 97], [Roughgarden, 01].
- Πως «διαχειριστής» κατευθύνει αλτρουιστές ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τίμημα της αναρχίας;
  - Τίμημα αναρχίας είναι φθίνουσα συνάρτηση α.
  - Διαφορετικές πολιτικές δίνουν διαφορετικές συναρτήσεις.
  - Σημαντική μείωση τιμήματος αναρχίας με **απλό** μοντέλο (π.χ. όχι αλλαγή κόστους, όχι «κρυφές» επιβαρύνσεις).
  - Στο παράδειγμα, ένας αλτρουιστής «επιβάλλει» βέλτιστη λύση.

Πολιτικές Stackelberg

- Σημαντική δουλειά για μη-ατομικά παίγνια:
  - [Roughgarden, 01] προτείνει LLF και Scale για παράλληλους πόρους και αναλύει LLF.
  - [Swamy, 07] ενισχύει και επεκτείνει [Roughgarden, 01].
  - [Karakostas, Kolliopoulos, 06] φράγματα για LLF και Scale σε γραμμικά μη-ατομικά παίγνια συμφόρησης.
  - [Kaporis, Spirakis, 06] προσδιορίζουν ελάχιστο α που «επιβάλλει» βέλτιστη λύση.
  - [Sharma, Williamson, 07] προσδιορίζουν ελάχιστο α που εξασφαλίζει βελτίωση.
- Μια μόνο δουλειά σε **ατομικά** παίγνια [Fotakis, 07]:
  - Άνω και κάτω φράγματα για γραμμικά παίγνια.
  - Άνω φράγματα για παράλληλους πόρους και γενικές συναρτήσεις κόστους.

Πολιτικές Stackelberg

- Έστω βέλτιστη διαμόρφωση $o = (o_1, \dots, o_n)$
  - Πολιτική Stackelberg για $n_s = an$ χρήστες επιλέγει $L \subseteq N$, $|L| = n_s$, και ακολουθεί διαμόρφωση $s(L) = (o_i)_{i \in L}$
  - Άλλοι χρήστες φθάνουν σε ισορροπία Nash $\sigma(L)$ για παίγνιο $\tilde{\Gamma}_L(N \setminus L, E, (\Sigma_i)_{i \in N \setminus L}, (\tilde{d}_e)_{e \in E})$, όπου $\tilde{d}_e(x) = d_e(x + s_e(L))$
  - Υποθέτουμε «**χειρότερη**» ισορροπία Nash $\sigma(L)$.
  - και «**χειρότερη**» συνολική διαμόρφωση $f(L) = \sigma(L) + s(L)$
  - Τίμημα αναρχίας = $C(f(L))/C(o)$
  - Τίμημα αναρχίας εξαρτάται από επιλογή και μέγεθος L.

Scale

- Για μη-ατομικά παίγνια, $s_e = \alpha o_e$ [Roughgarden 01].
  - ... αλλά όχι εφικτό για ατομικά παίγνια.
- Για ατομικά παίγνια, επιλέγει τυχαίο $L \subseteq N, |L| = n_s$

$$\Pr[L] = \binom{n}{n_s} \text{ και } \mathbb{E}[s_e(L)] = \alpha o_e, \forall e \in E$$

  - Άνω φράγμα στο **μέγιστο** αναμενόμενο κόστος:

$$\mathbb{E}[C(f)]/C(o) \leq \max\{\tfrac{5-3\alpha}{2}, \tfrac{5-4\alpha}{2-2\alpha}\}$$

  - Κάτω φράγμα στο **μέγιστο** (αναμενόμενο) κόστος ισχύει για κάθε (randomized) πολιτική Stackelberg:

$$\mathbb{E}[C(f)]/C(o) \geq \begin{cases} \frac{5-5\alpha+2\alpha^2}{2} & \alpha \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{1+\alpha} & \alpha \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Largest Latency First (LLF)

- Επιλέγονται στρατηγικές με μεγαλύτερο κόστος στην βέλτιστη λύση [Roughgarden 01].
  - Δεν χρησιμοποιούνται από «εγωιστικούς» χρήστες.
  - Υποθέτουμε ότι $c_1(o) \geq c_2(o) \geq \cdots \geq c_n(o)$
  - $L = \{ 1, 2, \dots, n_s \}$
  - Άνω φράγμα στο τίμημα αναρχίας για LLF:

$$C(f)/C(o) \leq \min\{\tfrac{5}{2} - \tfrac{11}{8}\alpha, \tfrac{3-2\alpha+\sqrt{5-4\alpha}}{2}\}$$

  - Κάτω φράγμα στο τίμημα αναρχίας για LLF:

$$C(f)/C(o) \geq \frac{5(2-\alpha)}{4+\alpha}$$

Ερευνητικές Κατευθύνσεις

- Ενεργή ερευνητική κατεύθυνση:
  - Θεωρητική Πληροφορική – Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα.
  - Τεχνητή Νοημοσύνη – Agents, P2P.
- Ύπαρξη και υπολογ. πολυπλοκότητα ισορροπιών Nash.
- Ταχύτητα σύγκλισης παικτών σε ισορροπίες Nash.
- Ανάλυση ιδιοτήτων ισορροπιών Nash (π.χ. τίμημα αναρχίας και σταθερότητας).
- Μηχανισμοί «προώθησης» ισορροπιών με επιθυμητές ιδιότητες.
- Βέλτιστος σχεδιασμός (πολύπλοκων) συστημάτων για «εγωιστικές» ανταγωνιστικές οντότητες.