Σύντομη Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων

Δημήτρης Φωτάκης

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 15780 Αθήνα
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Βασικοί Ορισμοί

Διαισθητικά, γράφημα είναι οτιδήποτε μπορεί να αναπαρασταθεί ("ζωγραφιστεί") με σημεία (κορυφές) και γραμμές (ακμές - κατευθυνόμενες ή μη) μεταξύ των σημείων.

Τυπικά, ένα *μη-κατευθυνόμενο γράφημα* (ή γράφος, undirected graph) G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G \equiv (V, E)$, όπου $V = \{v_1, \dots v_n\}$ είναι το σύνολο των κορυφών του και $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ είναι το σύνολο των ακμών του. Κάθε ακμή είναι ένα διμελές σύνολο κορυφών, $e = \{v_1, v_2\}$, όχι απαραίτητα διαφορετικών μεταξύ τους. Στα *κατευθυνόμενα* γραφήματα (directed graphs), κάθε ακμή είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών, $e = (v_1, v_2)$. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι ο αριθμός των κορυφών του, συνήθως συμβολίζεται με n ή $|V|$, και ο αριθμός των ακμών του, συνήθως συμβολίζεται με m ή $|E|$.

Η (μη-κατευθυνόμενη) ακμή $e = \{v_1, v_2\}$ λέμε ότι συνδέει τις κορυφές v_1 και v_2, οι οποίες ονομάζονται και άκρα της. Η κατευθυνόμενη ακμή $e = (v_1, v_2)$ λέμε ότι συνδέει την κορυφή v_1 με την v_2. Η v_1 ονομάζεται ουρά (ή αρχή) της ακμής e και η v_2 ονομάζεται κεφαλή (ή τέλος) της e. Δύο κορυφές που συνδέονται με ακμή ονομάζονται *γειτονικές*. Μία ακμή που τα δύο άκρα της ταυτίζονται (ή η αρχή της ταυτίζεται με το τέλος της αν είναι κατευθυνόμενη) ονομάζεται ανακύκλωση (ή βρόγχος, loop). Δύο ακμές με κοινά άκρα (ή κοινή αρχή και τέλος αν είναι κατευθυνόμενες) ονομάζονται *παράλληλες*.

Ένα γράφημα ονομάζεται *απλό* όταν δεν έχει παράλληλες ακμές και ανακυκλώσεις. Στο εξής, θα θεωρούμε πάντα απλά γραφήματα (εκτός αν σαφώς δηλώνεται κάτι διαφορετικό). Ειδικότερα, με τον όρο γράφημα θα αναφερόμαστε σε ένα *απλό, μη-κατευθυνόμενο γράφημα*. Επίσης, θα αναφερθούμε μόνο σε *πεπερασμένα* γραφήματα που ορίζονται σε πεπερασμένα σύνολα κορυφών.

Το *συμπληρωματικό* ενός γραφήματος $G(V, E)$, συνήθως συμβολίζεται με $\overline{G}$, είναι ένα γράφημα στο ίδιο σύνολο κορυφών V που περιλαμβάνει μια ακμή αν και μόνο αν αυτή δεν ανήκει στο E. Ένα γράφημα ονομάζεται *κλίκα* (ή πλήρες γράφημα) αν κάθε ζευγάρι κορυφών του συνδέεται με ακμή. Η κλίκα n κορυφών συμβολιζεται με K_n και έχει ακριβώς $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές. Ένα σύνολο κορυφών χωρίς καμία ακμή μεταξύ τους ονομάζεται *ανεξάρτητο σύνολο*. Συνεπώς, το συμπληρωματικό γράφημα μιας κλίκας είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο (στο ίδιο σύνολο κορυφών).

Ένα γράφημα ονομάζεται διμερές (ή διχοτομίσιμο, bipartite) αν οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Ένα διμερές γράφημα ονομάζεται *πλήρες* αν κάθε κορυφή στο ένα μέρος (ανεξάρτητο σύνολο) συνδέεται με κάθε κορυφή στο άλλο μέρος. Το πλήρες διμερές γράφημα με n κορυφές στο ένα μέρος και m κορυφές στο άλλο μέρος συμβολίζεται με $K_{n,m}$ και έχει $n \cdot m$ ακμές.

Άσκηση 1. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να περιέχει ένα απλό διμερές γράφημα με n κορυφές; Ισοδύναμα, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $n^2/4$ ακμές δεν είναι διμερές.

Λύση. Ο μέγιστος αριθμός ακμών συμβαίνει όταν έχουμε το πλήρες διμερές γράφημα. Αφού όλες οι κορυφές είναι n, αν το ένα σύνολο κορυφών περιέχει k κορυφές, το δεύτερο θα περιέχει $(n-k)$. Ο συνολικός αριθμός ακμών του $K_{k,n-k}$ είναι $k(n-k)$. Το γινόμενο μεγιστοποιείται για $k = n/2$ αν το n είναι άρτιος και για $k = (n-1)/2$ αν το n είναι περιττός. Συνεπώς, αν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $n^2/4$, ενώ αν το n είναι περιττός, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $(n^2-1)/4$. Παρατηρείστε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι πάντα ακέραιοι. □

Ένα γράφημα $G'(V', E')$ αποτελεί *υπογράφημα* (subgraph) του $G(V, E)$ όταν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Το υπογράφημα $G'(V', E')$ ονομάζεται επικαλύπτον (spanning) όταν $V' = V$ (δηλαδή, περιέχει / καλύπτει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος), και *επαγόμενο* (induced) με σύνολο κορυφών V' όταν $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$ (δηλαδή περιέχει όλες τις ακμές του αρχικού γραφήματος μεταξύ των κορυφών του V').

Μια ακολουθία "συνεχόμενων" ακμών ονομάζεται *διαδρομή* (walk). Δηλαδή, διαδρομή είναι μια ακολουθία ακμών $(e_1, \ldots, e_k)$ όπου για κάθε i, $1 \le i \le k-1$, το ένα άκρο (το τέλος για κατευθυνόμενα γραφήματα) της ακμής e_i συμπίπτει με το άλλο άκρο (την αρχή) της ακμής e_{i+1}. Ο αριθμός των ακμών στη διαδρομή ονομάζεται *μήκος* της διαδρομής. Μία διαδρομή ονομάζεται *μονοκονδυλιά* (trail) όταν όλες οι ακμές της είναι διαφορετικές και ονομάζεται *μονοπάτι* (path) όταν όλες οι κορυφές από τις οποίες διέρχεται είναι διαφορετικές. Μερικές φορές, χρησιμοποιείται ο όρος μονοπάτι για τη μονοκονδυλιά (διαδρομή διαφορετικών ακμών) και απλό μονοπάτι (simple path) για τη διαδρομή με διαφορετικές κορυφές (και άρα ακμές).

Μία διαδρομή χαρακτηρίζεται σαν *κλειστή* όταν η αρχική και η τελική της κορυφή συμπίπτουν. Μια κλειστή διαδρομή ονομάζεται *κύκλος* (cycle ή *κύκλωμα*, circuit) όταν όλες οι ακμές της είναι διαφορετικές, και ονομάζεται *απλός κύκλος* (simple cycle) όταν όλες οι κορυφές της είναι διαφορετικές. Με άλλα λόγια, ο κύκλος (ή κύκλωμα) είναι μία κλειστή μονοκονδυλιά και ο απλός κύκλος είναι ένα κλειστό μονοπάτι.

Η *απόσταση* $D(u, v)$ μεταξύ δύο κορυφών u, v είναι το μήκος του συντομώτερου μονοπατιού μεταξύ τους. Η *διάμετρος* $D(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών στο G, $D(G) \equiv \max_{u,v \in V}\{D(u, v)\}$.

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα περιέχει μία διαδρομή από μια κορυφή u σε μια κορυφή w αν και μόνο αν περιέχει ένα μονοπάτι από τη u στη w.

Λύση. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής, γιατί κάθε μονοπάτι είναι εξ' ορισμού διαδρομή. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι αν η διαδρομή μεταξύ u και w δεν αντιστοιχεί σε μονοπάτι, τότε αυτή πρέπει να περιέχει κορυφές που επαναλαμβάνονται. Όμως, το τμήμα της διαδρομής ανάμεσα σε δύο διαφορετικές εμφανίσεις της ίδιας κορυφής είναι ένας κύκλος (όχι κατ' ανάγκη απλός). Αφαιρώντας όλους αυτούς τους κύκλους, καταλήγουμε σε ένα μονοπάτι από τη u στη w. Με απολύτως παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα γράφημα περιέχει μία κλειστή διαδρομή (ή έναν κύκλο) αν και μόνο αν περιέχει έναν απλό κύκλο. □

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος περιέχει έναν απλό κύκλο και ότι κάθε μονοκονδυλιά περιέχει ένα απλό μονοπάτι.

Ένα (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα είναι *συνεκτικό* (ή συνδεόμενο, ή συνδεδεμένο, connected) όταν υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών. Δηλαδή, σε ένα συνεκτικό γράφημα μπορούμε να μεταβούμε από οποιαδήποτε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη ακολουθώντας τις ακμές του γραφήματος.

Συνεκτικές Συνιστώσες. Δίνεται ένα (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα $G(V, E)$. Θεωρώ τη διμελή σχέση $\Sigma_G \subseteq V \times V$ τέτοια ώστε $(u, v) \in \Sigma_G$ ανν υπάρχει μονοπάτι από τη u στη v.

Η σχέση Σ_G είναι σχέση *ισοδυναμίας* γιατί είναι ανακλαστική ($\forall u \in V, (u, u) \in \Sigma_G$ - για κάθε κορυφή υπάρχει ένα τετριμμένο μονοπάτι προς τον εαυτό της με μηδενικό μήκος), συμμετρική ($\forall u, v \in V, (u, v) \in \Sigma_G \Rightarrow (v, u) \in \Sigma_G$ - το γράφημα είναι μη κατευθυνόμενο και συνεπώς αν υπάρχει μονοπάτι από τη u στη v, θα υπάρχει και μονοπάτι από τη v στη u), και μεταβατική ($\forall u, v, w \in V, (u, w) \in \Sigma_G$ και $(w, v) \in \Sigma_G \Rightarrow (u, v) \in \Sigma_G$ - μεταβαίνουμε από τη u στη w και από εκεί στη v ακολουθώντας τα αντίστοιχα μονοπάτια).

Η σχέση Σ_G χωρίζει τις κορυφές του γραφήματος σε κλάσεις ισοδυναμίες (που αντιστοιχούν στα μεγιστικά (maximal) συνεκτικά υπογραφήματα του G) που ονομάζονται *συνεκτικές συνιστώσες* (connected components). Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι ένα συνεκτικό γράφημα, ενώ δεν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ κορυφών που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Σε πολλές κατηγορίες ασκήσεων, κάθε συνεκτική συνιστώσα μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ανεξάρτητο γράφημα. □

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι *συνεκτικό* όταν για κάθε ζευγάρι κορυφών του $u, v \in V$, υπάρχει μονοπάτι (που σέβεται τις κατευθύνσεις των ακμών) είτε από τη u στη v είτε από τη v στη u. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι *ισχυρά συνεκτικό* (strongly connected) όταν για κάθε ζευγάρι κορυφών του $u, v \in V$, υπάρχουν μονοπάτια (που σέβονται τις κατευθύνσεις των ακμών) και από τη u στη v και από τη v στη u. Ισοδύναμα, σε ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα, κάθε ζευγάρι κορυφών βρίσκεται σε κατευθυνόμενο κύκλο.

Για να είναι η Σ_G σχέση ισοδυναμίας στα κατευθυνόμενα γραφήματα, πρέπει να εξασφαλίζεται η συμμετρική ιδιότητα (δεν ισχύει πλέον αυτονόητα γιατί οι ακμές είναι κατευθυνόμενες). Αυτό συμβαίνει αν ορίσουμε τη Σ_G σαν $\Sigma_G \subseteq V \times V$: $(u, v) \in \Sigma_G$ ανν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι και από τη u στη v και από τη v στη u. Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται από τη σχέση Σ_G σε κατευθυνόμενα γραφήματα ονομάζονται *ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες* (strongly connected components) και αντιστοιχούν στα μεγιστικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα του G.

Παρατηρούμε επίσης ότι ο αριθμός των (ισχυρά) συνεκτικών συνιστωσών δεν μπορεί να μεγαλώσει αν προσθέσουμε νέες ακμές στο γράφημα αφού η προσθήκη νέων ακμών δεν μπορεί να αφαιρέσει από το γράφημα κάποιο μονοπάτι που ήδη υπήρχε.

Άσκηση 4. Να αποδείξετε ότι ένα γράφημα είναι συνεκτικό ανν για κάθε διαμέριση των κορυφών του σε δύο υποσύνολα υπάρχει πάντα ακμή μεταξύ των δύο υποσυνόλων.

Λύση. Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, θα πρέπει να υπάρχει ακμή που θα επιτρέπει τη "μετάβαση" από το ένα σύνολο στο άλλο. Για το αντίστροφο, ξεκινάμε από μία οποιαδήποτε κορυφή, επεκτεινόμαστε τους γειτόνους της, στους γειτόνους των γειτόνων της, κοκ. Η ιδιότητα που υποθέσαμε εξασφαλίζει ότι αυτή η διαδικασία δεν θα τελειώσει πριν επισκεφθούμε όλες τις κορυφές του γραφήματος. Η συγκεκριμένη διαδικασία είναι μια παραλλαγή του Αναζήτησης Κατά Πλάτος (Breadth First Search). □

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι το συμπληρωματικό κάθε μη συνεκτικού γραφήματος είναι συνεκτικό (και μάλιστα έχει διάμετρο το πολύ 2).

Λύση. Έστω μη συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ και έστω u, w δύο οποιεσδήποτε κορυφές του G. Θα δείξω ότι στο συμπληρωματικό γράφημα του G, έστω $\overline{G}$, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των u και w. Αφού το G είναι μη συνεκτικό, θα αποτελείται από περισσότερες της μίας συνεκτικές συνιστώσες. Διακρίνω τις ακόλουθες περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. Οι κορυφές u και w ανήκουν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του G. Τότε η ακμή $\{u, w\}$ δεν υπάρχει στο γράφημα G (αλλιώς οι δύο κορυφές θα ήταν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα). Επομένως, η ακμή $\{u, w\}$ υπάρχει στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ και η απόσταση των u, v είναι 1.
Περίπτωση 2. Οι κορυφές u και w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G. Έστω κορυφή v που ανήκει σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από αυτή που ανήκουν οι u και w (εδώ χρησιμοποιώ την υπόθεση για τη μη συνεκτικότητα του G). Όπως και στην Περίπτωση 1, οι ακμές $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ δεν υπάρχουν στο G, και επομένως υπάρχουν στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$. Συνεπώς, στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$, οι κορυφές u και w συνδέονται μέσω του μονοπατιού $u\,v\,w$. Η απόσταση των u, w είναι 2. □

2 Βαθμός Κορυφής

Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, ο *βαθμός* (degree) μιας κορυφής v, που συμβολίζεται με $d(v)$, είναι ο αριθμός των ακμών που εφάπτονται στη v. Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα, διακρίνουμε το *βαθμό εισόδου* (in-degree) της v, που συμβολίζεται με $d_{\text{in}}(v)$ και είναι ο αριθμός των ακμών που καταλήγουν στη v, και το *βαθμό εξόδου* (out-degree) της v, που συμβολίζεται με $d_{\text{out}}(v)$ και είναι ο αριθμός των ακμών που ξεκινούν από τη v.

Ο *ελάχιστος βαθμός* $\delta(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ο μικρότερος βαθμός κάποιας κορυφής του, $\delta(G) \equiv \min_{v \in V}\{d(v)\}$. Ο *μέγιστος βαθμός* $\Delta(G)$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ο μεγαλύτερος βαθμός κάποιας κορυφής του, $\Delta(G) \equiv \max_{v \in V}\{d(v)\}$.

Σε κάθε μη-κατευθυνόμενο γράφημα, το άθροισμα του βαθμού όλων των κορυφών είναι διπλάσιο του αριθμού των ακμών: $\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$. Ο λόγος είναι ότι κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό των δύο άκρων της. Από αυτή την ισότητα προκύπτει ότι ο αριθμός των κορυφών με περιττό βαθμό σε ένα γράφημα είναι άρτιος.

Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα, το άθροισμα του βαθμού εισόδου όλων των κορυφών είναι ίσο με το άθροισμα του βαθμού εξόδου και ίσο με τον αριθμό των ακμών: $\sum_{v \in V} d_{\text{in}}(v) = \sum_{v \in V} d_{\text{out}}(v) = |E|$. Ο λόγος είναι ότι κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό εισόδου του τέλους της και 1 στο βαθμό εξόδου της αρχής της.

Παράδειγμα 1. Υπάρχει γράφημα με 9 κορυφές που όλες έχουν βαθμό 3[1]; Η απάντηση είναι *όχι* γιατί ένα τέτοιο γράφημα θα είχε $\frac{3 \times 9}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$ ακμές. □

[1] Ένα γράφημα του οποίου όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό ονομάζεται *κανονικό* (regular). Όταν ο βαθμός όλων των κορυφών είναι k, το γράφημα ονομάζεται k-κανονικό. Όταν ο βαθμός όλων των κορυφών είναι 3, το γράφημα ονομάζεται *κυβικό* (cubic). Ένας k-κανονικός γράφος περιέχει $kn/2$ ακμές.

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να υπάρξει απλό γράφημα με (α) 6 κορυφές με βαθμό 2, 3, 3, 4, 4, και 5 αντίστοιχα, (β) 5 κορυφές με βαθμό 2, 3, 4, 4, και 5 αντίστοιχα, (γ) 4 κορυφές με βαθμό 1, 3, 3, και 3 αντίστοιχα, (δ) 7 κορυφές με βαθμό 1, 3, 3, 4, 5, 6 και 6 αντίστοιχα.

Λύση. (α) Το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός. (β) Ο μέγιστος βαθμός είναι ίσος με τον αριθμό των κορυφών. (γ) Και οι τρεις κορυφές βαθμού 3 πρέπει να συνδέονται στην τέταρτη που έχει βαθμό 1. (δ) Οι δύο κορυφές βαθμού 6 πρέπει να συνδέονται σε όλες τις κορυφές, άρα και σε αυτή με βαθμό 1. □

Άσκηση 7. Έστω απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ στο οποίο το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1$ ($n \equiv |V|$). Να αποδείξετε ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό (και μάλιστα έχει διάμετρο το πολύ 2). Το ίδιο ισχύει και αν $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$.

Λύση. Έστω u, v δύο αυθαίρετα επιλεγμένες κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή (αν συνδέονται με ακμή, προφανώς υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους και η απόστασή τους είναι 1). Θα δείξουμε ότι υπάρχει μονοπάτι μεταξύ των u και v αποδεικνύοντας ότι το G είναι συνεκτικό.

Έστω $\Gamma(u)$ και $\Gamma(v)$ τα σύνολα των κορυφών που είναι γειτονικές με τις u και v αντίστοιχα. Από υπόθεση $v, u \notin \Gamma(u) \cup \Gamma(v)$. Θα δείξουμε ότι $\Gamma(u) \cap \Gamma(v) \neq \emptyset$, δηλαδή ότι οι u και v έχουν ένα κοινό γείτονα. Επομένως, υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 μεταξύ τους.

Πράγματι, αν $\Gamma(u) \cap \Gamma(v) = \emptyset$, θα είχαμε $|\Gamma(u)| + |\Gamma(v)| = d(u) + d(v) \geq n - 1$. Αυτό είναι άτοπο επειδή $v, u \notin \Gamma(u) \cup \Gamma(v)$ και όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι n. □

Άσκηση 8. Να δείξετε ότι κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ακμές είναι συνεκτικό.

Λύση. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα που δεν είναι συνεκτικό. Θα αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες (χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι συνεκτικές του συνιστώσες είναι ακριβώς δύο). Έστω k, $1 \leq k \leq n-1$, ο αριθμός των κορυφών της μίας και $(n-k)$ ο αριθμός των κορυφών της άλλης. Η πρώτη θα έχει το πολύ $\frac{k(k-1)}{2}$ ακμές και η δεύτερη το πολύ $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ ακμές. Ο συνολικός αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-1)-2k(n-k)}{2}$. Το κλάσμα αυτό μεγιστοποιείται για $k = 1$ και $k = n-1$ (Η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή του k που αντιστοιχεί σε μη συνεκτικό γράφημα. Το αντίστοιχο γράφημα είναι μία κλίκα με $n-1$ κορυφές και μία απομονωμένη κορυφή.) Προκύπτει λοιπόν ότι το γράφημα έχει το πολύ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ακμές. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το γράφημα έχει περισσότερες από $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ ακμές. □

Άσκηση 9. Έστω γράφημα με ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού. Τότε αυτές ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα (ή ισοδύναμα, υπάρχει μονοπάτι μεταξύ τους).

Λύση. Αν άνηκαν σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα, θα είχαμε μία συνεκτική συνιστώσα με μία κορυφή περιττού βαθμού, το οποίο είναι άτοπο. □

3 Κύκλος Euler

Κύκλος Euler σε ένα γράφημα είναι κάθε κύκλος (όχι απαραίτητα απλός) που διέρχεται από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά και από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία φορά.

Υπάρχει ένας πολύ κομψός χαρακτηρισμός των γραφημάτων που έχουν κύκλο Euler: Ένα συνεκτικό (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν όλες οι κορυφές του γραφήματος έχουν άρτιο βαθμό. Μάλιστα, ένα συνεκτικό (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα έχει κύκλο Euler ανν οι ακμές του γραφήματος μπορούν να χωριστούν σε ένα σύνολο ξένων μεταξύ τους απλών κύκλων.

Για να αντιληφθούμε διαισθητικά την ισοδυναμία μεταξύ της ύπαρξης κύκλου Euler και της απαίτησης για άρτιο βαθμό των κορυφών, ας επιστρέψουμε στον ορισμό. Ο κύκλος Euler διέρχεται από κάθε ακμή ακριβώς μία φορά και από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία φορά. Επομένως, κάθε φορά που ο κύκλος επισκέπτεται μία κορυφή (από μία ακμή) την εγκαταλείπει από μία άλλη ακμή και στο τέλος όλες οι ακμές έχουν χρησιμοποιηθεί ακριβώς μία φορά. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κορυφή πρέπει να έχει άρτιο βαθμό (ακριβώς διπλάσιο από τον αριθμό των φορών που την επισκέφθηκε ο κύκλος Euler). Το αντίστροφο, μπορεί να αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή.

Για να φτιάξετε λοιπόν ένα γράφημα με κύκλο Euler, πρέπει όλες οι ακμές του να έχουν άρτιο βαθμό. Για να φτιάξετε ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο Euler, αρκεί κάποιες κορυφές του να έχουν περιττό βαθμό. Ομοίως, για να αποδείξετε ότι ένα γράφημα έχει κύκλο Euler, αρκεί να αποδείξετε ότι όλες του οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό. Για να αποδείξετε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Euler, αρκεί να αποδείξετε ότι κάποιες κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.

Άσκηση 10. Να αποδείξετε ότι αν ένα γράφημα έχει k κορυφές με περιττό βαθμό (το k είναι άρτιο αναγκαστικά), το σύνολο των ακμών του μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλιές.

Υπόδειξη: Υπάρχει μία λύση με μαθηματική επαγωγή. Μια δεύτερη λύση είναι να "ζευγαρώσουμε" τις κορυφές περιττού βαθμού χρησιμοποιώντας $k/2$ νέες ακμές. Τώρα όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και το γράφημα έχει κύκλο Euler. Αφαιρώντας τις ακμές που προσθέσαμε, ο κύκλος "διασπάται" σε $k/2$ μονοκονδυλιές. □

Άσκηση 11. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος με n κορυφές που έχει κύκλο Euler.

Λύση. Αν το n είναι περιττός, το $n-1$ είναι άρτιο. Σε αυτή την περίπτωση, το πλήρες γράφημα K_n έχει κύκλο Euler και ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-1)}{2}$ (αφού το γράφημα είναι απλό). Αν το n είναι άρτιος, το γράφημα όπου όλες οι ακμές έχουν βαθμό $n-2$ υπάρχει, είναι συνεκτικό, και συνεπώς έχει κύκλο Euler (Το γεγονός ότι ένα τέτοιο γράφημα υπάρχει αποδεικνύεται παίρνοντας το K_n, "ζευγαρώνοντας" τις κορυφές του, και αφαιρώντας την ακμή που συνδέει κάθε ζευγάρι κορυφών. Το γεγονός ότι ένα τέτοιο γράφημα είναι συνεκτικό προκύπτει από την προκύπτει από την Άσκηση 7.) Το γράφημα αυτό έχει $\frac{n(n-2)}{2}$ ακμές. Κάθε γράφημα με n κορυφές και περισσότερες ακμές, θα πρέπει να έχει μία τουλάχιστον κορυφή με βαθμό $n-1$ (περιττός) και συνεπώς δεν θα έχει κύκλο Euler. Αν λοιπόν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $\frac{n(n-2)}{2}$. □

Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα έχει κύκλο Euler ανν σε κάθε κορυφή, ο προς-τα-έσω βαθμός είναι ίσος με τον προς-τα-έξω βαθμό. Αν λοιπόν πάρουμε ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα και αντικαταστήσουμε κάθε ακμή του με δύο κατευθυνόμενες ακμές, μία σε κάθε κατεύθυνση, το αποτέλεσμα θα είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα με κύκλο Euler.

4 Κύκλος Hamilton

Κύκλος Hamilton σε ένα γράφημα είναι κάθε απλός κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος (ισοδύναμα, κύκλος Hamilton είναι κάθε απλός κύκλος μήκους n ή κάθε κύκλος που διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά). Ένα γράφημα με κύκλο Hamilton ονομάζεται και Hamiltonian γράφημα.

Δεν είναι γνωστό κανένα σύνολο ικανών και αναγκαιών συνθηκών που να χαρακτηρίζει τα γραφήματα με κύκλο Hamilton. Αρκετές αναγκαίες συνθήκες είναι γνωστές. Για παράδειγμα, κάθε Hamiltonian γράφημα είναι συνεκτικό και δεν έχει *γέφυρες*[2] ούτε *σημεία κοπής*[3]. Κάθε διμερές Hamiltonian γράφημα έχει τον ίδιο αριθμό κορυφών και στα δύο μέρη. Αν ένα γράφημα δεν ικανοποιεί κάποια αναγκαία συνθήκη, δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton. Υπάρχουν όμως γραφήματα που ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες και δεν έχουν κύκλο Hamilton.

Οι πιο γνωστές ικανές συνθήκες είναι τα θεωρήματα του Dirac και του Ore. Το θεώρημα του Dirac είναι: Κάθε (απλό μη-κατευθυνόμενο) γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφής μεγαλύτερο ή ίσο του $n/2$ είναι Hamiltonian. Το Θεώρημα του Ore αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Dirac: Αν το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών ενός (απλού μη-κατευθυνόμενου) γραφήματος είναι τουλάχιστον n, το γράφημα έχει κύκλο Hamilton. Κάθε γράφημα που ικανοποιεί κάποια από τις ικανές συνθήκες έχει κύκλο Hamilton. Υπάρχουν όμως γραφήματα που δεν ικανοποιούν τις ικανές συνθήκες και έχουν κύκλο Hamilton.

Επομένως, αν πρέπει να αποδείξετε ότι κάποιο γράφημα έχει κύκλο Hamilton, η πρώτη σκέψη είναι να βρείτε έναν κύκλο Hamilton στο γράφημα. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν (π.χ. το γράφημα είναι πολύ μεγάλο), πρέπει να δείξετε ότι ικανοποιεί κάποια από τις ικανές συνθήκες (π.χ. θεώρημα του Dirac). Αν πρέπει να δείξετε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton, πρέπει να βρείτε κάποια αναγκαία συνθήκη που δεν ικανοποιείται από το γράφημα (π.χ. έχει σημείο κοπής).

Άσκηση 12. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές δεν έχει κύκλο Euler, αλλά έχει κύκλο Hamilton.

Λύση. Το πλήρες γράφημα με 11 κορυφές έχει 55 ακμές. Συνεπώς, κάθε απλό γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές προκύπτει από το K_{11} με την αφαίρεση δύο ακμών. Για να αποκλείσω την ύπαρξη κύκλου Euler, χρειάζεται να διακρίνω δύο περιπτώσεις:
Περίπτωση 1. Οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν στην ίδια κορυφή. Αφού το γράφημα είναι απλό, οι δύο ακμές μπορούν να έχουν μόνο το ένα άκρο τους κοινό. Το γράφημα έχει μία κορυφή βαθμού 8, δύο κορυφές βαθμού 9, και 8 κορυφές με βαθμό 10. Συνεπώς, δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler, αφού περιέχει κάποιες κορυφές με περιττό βαθμό.
Περίπτωση 2. Αν οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν σε τέσσερις διαφορετικές κορυφές, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές πρέπει να έχει 4 κορυφές βαθμού 9 και 7 κορυφές βαθμού 10. Και σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler.

Η ύπαρξη κύκλου Hamilton προκύπτει από το θεώρημα του Ore, αφού σε κάθε περίπτωση, το άθροισμα των βαθμών κάθε ζεύγους κορυφών είναι τουλάχιστον $17 > 11$. □

[2] Μια ακμή ενός συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται γέφυρα αν δεν υπάρχει κύκλος που να την περιέχει. Η αφαίρεση της γέφυρας αίρει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

[3] Μία κορυφή ενός συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται σημείο κοπής αν η αφαίρεση της αίρει τη συνεκτικότητα του γραφήματος.

Άσκηση 13. Να χαρακτηρίσετε την κλάση των γραφημάτων στα οποία κάθε κύκλος Euler είναι επίσης και κύκλος Hamilton.

Λύση. Ένας κύκλος ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton πρέπει να διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Hamilton) και από κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Euler). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος C_n με n κορυφές και n ακμές (υπενθυμίζουμε ότι ο απλός κύκλος C_n , $n \geq 3$, αποτελείται από n κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_n$ και n ακμές $\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \ldots, \{u_{n-1}, u_n\}, \{u_n, u_1\}$).

Συγκεκριμένα, αν το γράφημα περιείχε $n+1$ ή περισσότερες ακμές, ο κύκλος Euler δεν θα ήταν κύκλος Hamilton (θα περιείχε περισσότερες από n ακμές και συνεπώς θα διερχόταν από κάποια κορυφή περισσότερες από μία φορές). Αν το γράφημα περιείχε $n-1$ ή λιγότερες ακμές, είτε δεν θα περιείχε κανένα κύκλο (θα ήταν δέντρο) είτε δεν θα ήταν συνεκτικό, και δεν θα είχε ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. Τέλος, αν το γράφημα περιείχε n ακμές αλλά δεν ήταν το C_n, τότε θα περιείχε ένα κύκλο με μήκος μικρότερο του n και δεν θα μπορούσε να περιέχει ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. □

Άσκηση 14. Μία ακμή ονομάζεται *γέφυρα* αν δεν υπάρχει κύκλος που την περιέχει. Δείξτε ότι αν ένα απλό γράφημα έχει κύκλο Hamilton, τότε δε μπορεί να περιέχει γέφυρα. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν αντί για κύκλο Hamilton υποθέσουμε ότι το γράφημα έχει κύκλο Euler;

Λύση. Έστω $G(V, E)$ ένα οποιοδήποτε γράφημα με κύκλο Hamilton και $\{u, v\} \in E$ μία οποιαδήποτε ακμή του G. Αφού το γράφημα έχει κύκλο Hamilton, υπάρχει μονοπάτι π μεταξύ των u και v που δεν διέρχεται από την ακμή $\{u, v\}$. Το μονοπάτι π μαζί με την $\{u, v\}$ σχηματίζει κύκλο. Συνεπώς, καμία ακμή του γραφήματος G δεν μπορεί να είναι γέφυρα.

Με το ίδιο σκεπτικό, μια ακμή $\{u, v\}$ δεν μπορεί να είναι γέφυρα ακόμη και στην περίπτωση που απλώς υπάρχει κάποιος κύκλος που διέρχεται από τις u και v (ακόμη και αν αυτός ο κύκλος δεν είναι κύκλος Hamilton).

Όσο για τον κύκλο Euler, αυτός διέρχεται από όλες τις ακμές του γραφήματος. Συνεπώς, κάθε γράφημα με κύκλο Euler δεν μπορεί επίσης να περιέχει γέφυρα. □

Άσκηση 15. Να δείξετε ότι σε κάθε γράφημα που περιέχει γέφυρα, υπάρχει κάποια κορυφή με περιττό βαθμό.

Άσκηση 16. Ένα τριμερές γράφημα είναι ένα γράφημα στο οποίο οι κόμβοι του διαμερίζονται σε τρία ανεξάρτητα σύνολα. Το $K_{m,n,k}$ είναι το τριμερές γράφημα στο οποίο τα τρία ανεξάρτητα σύνολα, έστω A, B και Γ, έχουν αντίστοιχα m, n και k κορυφές, και στο οποίο κάθε κορυφή σε κάθε σύνολο από τα A, B και Γ είναι συνδεδεμένη με όλες τις άλλες κορυφές στα άλλα δύο σύνολα. (α) Να δείξετε ότι το $K_{2,4,6}$ είναι Hamiltonian. (β) Να δείξετε ότι το $K_{n,2n,3n}$ είναι Hamiltonian για κάθε θετικό ακέραιο n.

5 Αναπαράσταση Γραφημάτων

5.1 Πίνακας Γειτνίασης

Ο *Πίνακας Γειτνίασης* (Adjacency Matrix) A ενός γραφήματος $G(V,E)$[4] είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $|V| \times |V|$, οι γραμμές και οι στήλες του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές του. Τα στοιχεία του πίνακα γειτνίασης ορίζονται με βάση τις ακμές του γραφήματος από τη σχέση:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η αναπαράσταση του γραφήματος G με πίνακα γειτνίασης απαιτεί $\Theta(n^2)$ θέσεις μνήμης.

Είναι εύκολο να δούμε ότι για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες γειτνίασης αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετική αρίθμηση κορυφών. Βέβαια αν θεωρήσουμε δύο πίνακες που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα και κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία (δηλ. κατασκευάσουμε το γράφημα που αντιστοιχεί σε κάθε πίνακα), θα καταλήξουμε σε *ισομορφικά* γραφήματα!

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V,E)$ είναι

1. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι 0 (γιατί δεν υπάρχουν ανακυκλώσεις) και ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο (οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση).
2. Το άθροισμα των στοιχείων της γραμμής ή της στήλης που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή v_i είναι ίσο με το βαθμό της κορυφής, δηλ. $\sum_{v_j \in V} A[i,j] = \sum_{v_j \in V} A[j,i] = \deg(v_i)$.
3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα γειτνίασης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος, δηλ. $\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} A[i,j] = 2\,|E|$.

Το $[i,j]$-στοιχείο του πίνακα A^ℓ (δηλ. της ℓ-οστής δύναμης του πίνακα γειτνίασης) είναι ίσο με τον αριθμό των *διαδρομών* (μπορεί να έχουν επαναλαμβανόμενες ακμές) που συνδέουν τις κορυφές v_i και v_j. Για παράδειγμα, $A^2[i,i] = \deg(v_i)$ για κάθε κορυφή $v_i \in V$ επειδή οι μοναδικές διαδρομές μήκους 2 που ξεκινούν και τελειώνουν στην ίδια κορυφή αποτελούνται από τις ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή, έχουν δηλαδή τη μορφή $\{v_i, u\}, \{u, v_i\}$.

Έστω ο πίνακας $Y = \sum_{\ell=1}^{n-1} A^\ell$, όπου $n = |V|$ είναι ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

Πρόταση 1. *$Y[i,j] > 0$ ανν υπάρχει διαδρομή από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει διαδρομή από τη v_i στη v_j, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχει και (απλό) μονοπάτι μήκους $\ell \leq n-1$. Επομένως, θα είναι $A^\ell[i,j] > 0$ που σημαίνει ότι $Y[i,j] > 0$ (επειδή οι δυνάμεις του πίνακα A δεν έχουν αρνητικά στοιχεία). Αντίστροφα, για να είναι $Y[i,j] > 0$, θα πρέπει να υπάρχει κάποιος ακέραιος ℓ, $1 \leq \ell \leq n-1$, για τον οποίο $A^\ell[i,j] > 0$. Συνεπώς υπάρχει διαδρομή μήκους ℓ τη v_i στη v_j. □

Αν κάποιο στοιχείο του Y είναι 0, το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν υπάρχει μη-διαγώνιο στοιχείο $Y[i,j] = 0$, δεν υπάρχει διαδρομή μεταξύ των αντίστοιχων κορυφών σύμφωνα

[4] Σε αυτές τις σημειώσεις αναφερόμαστε μόνο στην αναπαράσταση απλών μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων.

με την Πρόταση 1. Επίσης, αν υπάρχει διαγώνιο στοιχείο $Y[i,i] = 0$, η αντίστοιχη κορυφή πρέπει να είναι απομονωμένη. Αντίστροφα, αν το γράφημα είναι συνεκτικό, όλα τα στοιχεία του Y είναι θετικά.

Ας θεωρήσουμε τώρα τον $n \times n$ πίνακα X που ορίζεται ως:

$$X[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \neq j \text{ και } Y[i,j] > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Σαν άσκηση, να αποδείξετε ότι το γράφημα G (από το οποίο προκύπτει ο πίνακας Y) είναι συνεκτικό ανν το γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον X είναι το K_n. Επίσης να αποδείξετε ότι αν το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό, τότε το γράφημα που αντιστοιχεί στον πίνακα X έχει μία κλίκα για κάθε συνεκτική συνιστώσα του G.

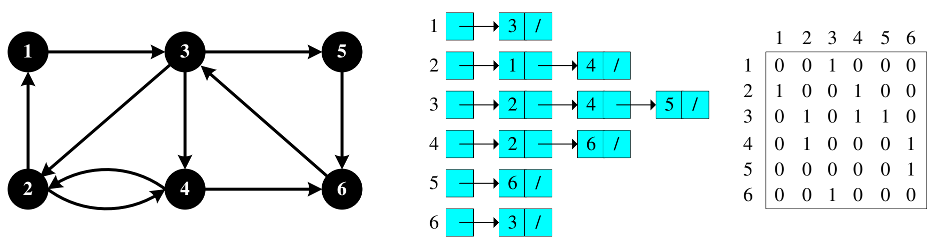
Άσκηση 17. Έστω A ο πίνακας γειτνίασης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με n κορυφές, και $\overline{A}$ ο πίνακας γειτνίασης του συμπληρωματικού γραφήματος $\overline{G}$. Έστω επίσης $Y = \sum_{\ell=1}^{n-1} A^\ell$ και $\overline{Y} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \overline{A}^\ell$. Ποιο είναι το γράφημα με πίνακα γειτνίασης τον $A + \overline{A}$ και γιατί; Υπάρχουν μηδενικά στοιχεία στον πίνακα $Y + \overline{Y}$; (Οι απαντήσεις είναι K_n και όχι αντίστοιχα. Απομένει να αιτιολογηθούν).

5.2 Λίστα Γειτνίασης

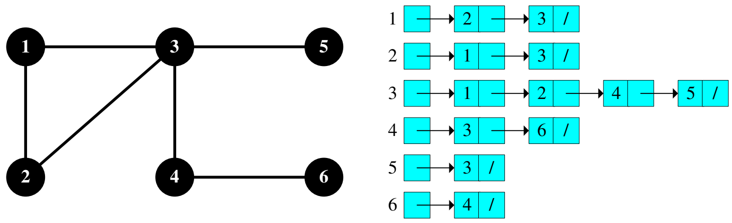
Η *λίστα γειτνίασης* (adjacency list) ενός γραφήματος $G(V,E)$ αποτελείται από τη λίστα των γειτονικών κορυφών για κάθε κορυφή $v \in V$. Οι δείκτες στα πρώτα στοιχεία αυτών των λιστών αποθηκεύονται σε έναν πίνακα L με n θέσεις. Συγκεκριμένα, ο δείκτης στο πρώτο στοιχείο της λίστας των γειτονικών κορυφών της $v \in V$ βρίσκεται στη θέση $L[v]$. Το μέγεθος της λίστας των γειτόνων της v είναι ίσο με το βαθμό της. Επομένως, η αναπαράσταση του G με λίστα γειτνίασης απαιτεί $\Theta(n+m)$ θέσεις μνήμης.

Ένα παράδειγμα αναπαράστασης κατευθυνόμενο γραφήματος με λίστα γειτνίασης και πίνακα γειτνίασης δίνεται στο Σχήμα 1, ενώ στο Σχήμα 2 δίνεται ένα παράδειγμα αναπαράστασης μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

Όταν το γράφημα είναι *αραιό* (sparse), δηλαδή έχει αριθμό ακμών $o(n^2)$, η αναπαράσταση με λίστα γειτνίασης απαιτεί ασυμπτωτικά λιγότερες θέσεις μνήμης από την αναπαράσταση με πίνακα γειτνίασης. Αντίθετα, όταν το γράφημα είναι *πυκνό* (dense), δηλαδή έχει αριθμό ακμών $\Theta(n^2)$, οι απαιτήσεις των δύο αναπαραστάσεων σε θέσεις μνήμης ταυτίζονται ως προς την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά.



Σχήμα 1. Παράδειγμα αναπαράστασης κατευθυνόμενου γραφήματος.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Σχήμα 2. Παράδειγμα αναπαράστασης μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

Η αναπαράσταση με πίνακα γειτνίασης πλεονεκτεί γιατί επιτρέπει τον έλεγχο για ύπαρξη ακμής μεταξύ δύο συγκεκριμένων κορυφών σε σταθερό χρόνο. Η αναπαράσταση με λίστα γειτνίασης πλεονεκτεί γιατί επιτρέπει την απαρίθμηση των γειτόνων μιας συγκεκριμένης κορυφής v σε χρόνο $\Theta(\deg(v))$ (αντί για $\Theta(n)$ που είναι ο αντίστοιχος χρόνος για τον πίνακα γειτνίασης).

Άσκηση 18. Να διατυπώσετε αλγόριθμους γραμμικού χρόνου που μετατρέπουν την αναπαράσταση ενός γραφήματος από λίστα γειτνίασης σε πίνακα γειτνίασης και αντίστροφα.

Άσκηση 19. Το τετράγωνο ενός γραφήματος $G(V, E)$, συμβολίζεται με $G^2(V, E^2)$, περιέχει την ακμή (u, w) αν και μόνο αν οι κορυφές u και w είναι γειτονικές ή έχουν κοινό γείτονα στο G (ισοδύναμα, αν και μόνο αν οι κορυφές u και w βρίσκονται βρίσκονται σε απόσταση το πολύ 2 στο G). Να διατυπώσετε αποδοτικούς αλγορίθμους για τον υπολογισμό του G^2 όταν το G αναπαρίσταται με λίστα γειτνίασης και με πίνακα γειτνίασης.

Άσκηση 20. Το *ανάστροφο γράφημα* (transpose graph) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ είναι το γράφημα $G^T(V, E^T)$ όπου $E^T = \{(v, u) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Δηλαδή, το ανάστροφο γράφημα G^T προκύπτει από το G αντιστρέφοντας τη φορά των ακμών του. Να διατυπώσετε αλγόριθμους γραμμικού χρόνου για τον υπολογισμό του ανάστροφου γραφήματος G^T όταν το G αναπαρίσταται με λίστα γειτνίασης και με πίνακα γειτνίασης.

5.3 Πίνακας Πρόσπτωσης

Ο *Πίνακας Πρόσπτωσης* (Incidence Matrix) M ενός γραφήματος $G(V, E)$ είναι ένας πίνακας $|V| \times |E|$, οι γραμμές του οποίου αριθμούνται με βάση τις κορυφές και οι στήλες με βάση τις ακμές. Τα στοιχεία του πίνακα πρόσπτωσης ορίζονται από τη σχέση:

$$A[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{αν η κορυφή } v_i \text{ είναι ένα από τα άκρα της ακμής } e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Για το ίδιο γράφημα, μπορούν να προκύψουν διαφορετικοί πίνακες πρόσπτωσης για διαφορετική αρίθμηση κορυφών και ακμών. Όπως και για τους πίνακες γειτνίασης, δύο πίνακες πρόσπτωσης που προκύπτουν από το ίδιο γράφημα αντιστοιχούν σε ισομορφικά γραφήματα.

Οι βασικές ιδιότητες του πίνακα πρόσπτωσης ενός απλού μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G(V, E)$ είναι

1. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με το βαθμό της αντίστοιχης κορυφής.

2. Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι ίσο με 2.
3. Το συνολικό άθροισμα των στοιχείων του πίνακα πρόσπτωσης είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γραφήματος.

6 Ισομορφικά Γραφήματα

Δύο γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι *ισομορφικά* όταν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη (δηλ. 1-1 και επί) αντιστοιχία $f : V_G \mapsto V_H$ μεταξύ των κορυφών τους που διατηρεί τη γειτονικότητα (δηλ. $\{v, u\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(v), f(u)\} \in E_H$). Η αντιστοιχία f καλείται ισομορφισμός μεταξύ των γραφημάτων G και H. Είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ισομορφισμοί μεταξύ δύο γραφημάτων. Διαισθητικά, δύο γραφήματα είναι ισομορφικά αν πρόκειται για το ίδιο γράφημα "ζωγραφισμένο" με διαφορετικό τρόπο.

Η σχέση ισομορφισμού μεταξύ των γραφημάτων είναι σχέση *ισοδυναμίας*. Πράγματι, είναι ανακλαστική αφού κάθε γράφημα είναι ισομορφικό με τον εαυτό του, είναι συμμετρική γιατί ο ισομορφισμός είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (άρα αντιστρέψιμη), και είναι μεταβατική γιατί η σύνθεση δύο ισομορφισμών δίνει έναν ισομορφισμό. Κάθε κλάση ισοδυναμίας που ορίζεται από τη σχέση ισομορφισμού περιλαμβάνει γραφήματα που συμφωνούν πρακτικά σε όλες τις ιδιότητές τους (και άρα ουσιαστικά ταυτίζονται).

Μια ιδιότητα ενός γραφήματος G ονομάζεται *αναλλοίωτη* (ως προς τη σχέση του ισομορφισμού) αν κάθε γράφημα που είναι ισομορφικό με το G έχει την ίδια ιδιότητα. Με απλά λόγια, κάθε ιδιότητα που δεν μεταβάλλεται αν "ζωγραφίσουμε" το γράφημα διαφορετικά είναι αναλλοίωτη. Τα ισομορφικά γραφήματα συμφωνούν ως προς τις αναλλοίωτες ιδιότητές τους. Η έννοια του ισομορφισμού είναι σημαντική γιατί *όλες* οι σημαντικές γραφοθεωρητικές ιδιότητες είναι αναλλοίωτες[5].

Πώς αποδεικνύουμε ότι μία ιδιότητα είναι αναλλοίωτη. Για παράδειγμα, θα αποδείξουμε ότι η ιδιότητα ότι το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton είναι αναλλοίωτη. Παρόμοια χειριζόμαστε κάθε αναλλοίωτη ιδιότητα.

Θεωρούμε γράφημα $G(V_G, E_G)$ που έχει την ιδιότητα καθώς και μια δομή που πιστοποιεί ότι το G έχει την ιδιότητα (στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μια τέτοια δομή είναι ένα μονοπάτι Hamilton). Θεωρούμε επίσης αυθαίρετα επιλεγμένο γράφημα $H(V_H, E_H)$ που είναι ισομορφικό με το G και έναν ισομορφισμό $f : V_G \mapsto V_H$ μεταξύ του G και του H.

Έστω $P = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ ένα μονοπάτι Hamilton στο G. Το P περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος G ακριβώς μία φορά και κάθε ζευγάρι διαδοχικών κορυφών στο P συνδέεται με ακμή. Έστω $f(P) = (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{n-1}), f(v_n))$ η εικόνα του P στο γράφημα H ως προς τον ισομορφισμό f. Αφού το f είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών των G και H, κάθε κορυφή του H εμφανίζεται στο $f(P)$ ακριβώς μία φορά. Αφού το f

[5] Μια ιδιότητα που δεν είναι αναλλοίωτη πρέπει να εξαρτάται από τον τρόπο που το γράφημα είναι "ζωγραφισμένο", π.χ. δύο ακμές τέμνονται, δύο κορυφές βρίσκονται από την ίδια πλευρά σε σχέση με κάποιον άξονα συμμετρίας του επιπέδου, αριθμός κορυφών στην εξωτερική όψη ενός επίπεδου γραφήματος, κάποιες κορυφές ανήκουν στην εξωτερική όψη ενός επίπεδου γραφήματος, κλπ. Αυτές οι ιδιότητες έχουν συνήθως μικρότερη σημασία από ιδιότητες όπως ο αριθμός των κορυφών και των ακμών, αν είναι το γράφημα συνεκτικό, αν είναι k-μερές, αν περιέχει μία μεγάλη κλίκα ή ένα μεγάλο ανεξάρτητο σύνολο, αν έχει κύκλο Hamilton ή Euler, κλπ. που δεν εξαρτώνται από τον τρόπο που το γράφημα είναι "ζωγραφισμένο" και είναι αναλλοίωτες.

είναι ισομορφισμός και διατηρεί τη γειτονικότητα, κάθε ζευγάρι διαδοχικών κορυφών στο $f(P)$ συνδέεται με ακμή (γιατί το ίδιο συμβαίνει στο P). Συνεπώς το $f(P)$ είναι ένα μονοπάτι Hamilton στο H και η ιδιότητα είναι αναλλοίωτη ως προς τη σχέση του ισομορφισμού.

Η ίδια ακριβώς μεθοδολογία ακολουθείται για όλες τις ιδιότητες!

Για να δείξουμε ότι μία ιδιότητα *δεν* είναι αναλλοίωτη, παρουσιάζουμε ένα ζευγάρι ισομορφικών γραφημάτων που το ένα έχει και το άλλο δεν έχει την ιδιότητα.

Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα είναι ισομορφικά. Ο πρώτος τρόπος είναι με τον ορισμό. Δηλαδή βρίσκουμε έναν ισομορφισμό f (μια αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών τους) που διατηρεί τη γειτονικότητα. Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ελέγξουμε τις ακμές των δύο γραφημάτων *μία-προς-μία* για να επιβεβαιώσουμε ότι κάθε ακμή $\{u, v\}$ υπάρχει στο ένα γράφημα αν και μόνο αν η ακμή $\{f(u), f(v)\}$ υπάρχει στο δεύτερο.

Αν τα γραφήματα έχουν πολλές ακμές, προσπαθούμε να δείξουμε ότι τα συμπληρωματικά γραφήματα είναι ισομορφικά (χρησιμοποιούμε πάλι τον ορισμό). Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι αν τα αρχικά γραφήματα έχουν πολλές ακμές, τα συμπληρωματικά έχουν λίγες, οπότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ισομορφικά.

Μια τρίτη μέθοδος (με περιορισμένη όμως εφαρμογή) είναι να αναδιατάξουμε τις κορυφές / ακμές του ενός γραφήματος ώστε ο πίνακας γειτνίασης ή πρόσπτωσης να ταυτίζεται με τον αντίστοιχο πίνακα του δεύτερου γραφήματος. Για μεγάλα γραφήματα (π.χ. περισσότερες από 6 κορυφές) αυτή η μέθοδος χρειάζεται μεγάλη προσοχή και μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε λάθη.

Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά. Βρίσκουμε μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία δεν συμφωνούν. Οι πιο συνηθισμένες αναλλοίωτες ιδιότητες είναι ο αριθμός των κορυφών και των ακμών, η ακολουθία των βαθμών των κορυφών, η συνεκτικότητα, η ύπαρξη κύκλου συγκεκριμένου μήκους, κλπ.

Ένα γράφημα ονομάζεται *αυτοσυμπληρωματικό* όταν είναι ισομορφικό προς το συμπληρωματικό του γράφημα. Για να είναι ένα γράφημα $G(V, E)$ αυτοσυμπληρωματικό πρέπει είτε το $|V|$ είτε το $|V| - 1$ να διαιρείται ακριβώς με το 4. Σαν άσκηση, βρείτε ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 4 κορυφές και ένα αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 5 κορυφές. Υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 6 κορυφές;

Αυτομορφισμός πάνω σε ένα γράφημα G είναι ένας ισομορφισμός του G στον εαυτό του. Με απλά λόγια, ο αυτομορφισμός αλλάζει τα “ονόματα” αλλά διατηρεί τους “ρόλους” τον κορυφών στο γράφημα.

Διαισθητικά, ένα γράφημα είναι *μεταβατικό κατά τις κορυφές του* όταν όλες οι κορυφές του γραφήματος παίζουν ακριβώς τον ίδιο “ρόλο”. Π.χ. ο απλός κύκλος με n κορυφές (C_n) και το πλήρες γράφημα με n κορυφές (K_n) είναι γραφήματα μεταβατικά κατά τις κορυφές τους επειδή δεν υπάρχει τρόπος να διακρίνουμε τη μία κορυφή από την άλλη. Αντίθετα, ένα απλό μονοπάτι με n κορυφές (P_n) δεν είναι μεταβατικό κατά τις κορυφές του επειδή αποτελείται από δύο άκρα και $n - 2$ ενδιάμεσες κορυφές.

7 Επίπεδα Γραφήματα

Ένα γράφημα είναι *επίπεδο* (planar) αν μπορεί να αποτυπωθεί / “ζωγραφιστεί” στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του. Κάθε επίπεδη αποτύπωση ενός (επίπεδου) γραφήματος ορίζει “κλειστές περιοχές” που ονομάζονται *όψεις* (faces) του γραφήματος. Τυπικά, δεδομένης μιας επίπεδης αποτύπωσης ενός γραφήματος, όψη ονομάζεται κάθε περιοχή του επιπέδου που περιορίζεται από ακμές και δεν μπορεί να χωριστεί σε μικρότερες όψεις. Οι εσωτερικές όψεις (interior faces) του γραφήματος είναι πεπερασμένες. Η εξωτερική όψη (exterior face) είναι απεριόριστη και περιλαμβάνει ολόκληρη την περιοχή του επιπέδου που εκτείνεται εκτός της αποτύπωσης του γραφήματος.

Κάθε ακμή ενός επίπεδου γραφήματος συμμετέχει σε δύο το πολύ όψεις. Αν μία ακμή ανήκει σε κύκλο, αυτή αποτελεί σύνορο / συμμετέχει σε δύο όψεις. Αν μία ακμή δεν ανήκει σε κύκλο, αυτή συμμετέχει σε μία όψη. Κάθε ακυκλικό επίπεδο γράφημα έχει μόνο μία όψη, την εξωτερική. Παρατηρείστε επίσης ότι αν ένα γράφημα είναι επίπεδο, κάθε υπογράφημα του είναι επίσης επίπεδο.

7.1 Τύπος του Euler

Έστω συνεκτικό επίπεδο γράφημα G (όχι απαραίτητα απλό) με n κορυφές, m ακμές, και f όψεις. Ο τύπος του Euler συνδέει αυτές τις τρεις ποσότητες με την εξής ισότητα: $n + f = m + 2$. Μια σημαντική συνέπεια του τύπου του Euler (από τις πολλές) είναι ότι ο αριθμός των όψεων ενός επίπεδου γραφήματος είναι χαρακτηριστικό του γραφήματος και δεν εξαρτάται από την αποτύπωση του γραφήματος στο επίπεδο (είναι δηλαδή αναλλοίωτη ιδιότητα, για συνεκτικά γραφήματα, ο αριθμός των όψεων είναι πάντα $f = m - n + 2$ ανεξάρτητα της αποτύπωσης).

Ένας τρόπος να αποδειχθεί ο τύπος του Euler είναι με επαγωγή στον αριθμό των όψεων του γραφήματος[6]. Αν το γράφημα έχει μία μόνο όψη, τότε αυτό είναι ακυκλικό και συνεκτικό, δηλαδή δέντρο. Ο τύπος έπεται από το γεγονός ότι $n = m+1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ο τύπος του Euler ισχύει για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με το πολύ f όψεις. Έστω οποιοδήποτε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και $f + 1$ όψεις. Πρέπει να δείξουμε ότι $n + (f + 1) = m + 2$.

Αφού το γράφημα έχει τουλάχιστον 2 όψεις, πρέπει να έχει έναν τουλάχιστον κύκλο και άρα τουλάχιστον μία ακμή που δεν είναι γέφυρα[7]. Η αφαίρεση μιας ακμής e που ανήκει σε κύκλο μειώνει τον αριθμό των όψεων κατά 1 (οι δύο όψεις που χωρίζονται από την e ενώνονται σε μία), μειώνει τον αριθμό των ακμών κατά 1, ενώ δεν επηρεάζει τον αριθμό των κορυφών, τη συνεκτικότητα, και την επιπεδότητα. Επομένως, το γράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της e είναι συνεκτικό και επίπεδο, και έχει n κορυφές, $m - 1$ ακμές, και f όψεις. Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$n + f = (m - 1) + 2 \Rightarrow n + f + 1 = m + 2$$

όπως απαιτείται.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και m ακμές έχει $m \leq 3n - 6$ ακμές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το γράφημα G είναι συνεκτικό (αν δεν είναι μπορούμε να προσθέσουμε ακμές ώστε να γίνει συνεκτικό παραμένοντας απλό και επίπεδο).

[6] Η απόδειξη που ακολουθεί χρησιμοποιεί την έννοια του δέντρου. Μπορείτε λοιπόν να την παραλείψετε σε αυτή τη φάση. Είναι όμως καλό να επιστρέψετε σε αυτή όταν μελετήσετε τις βασικές ιδιότητες των δέντρων.

[7] Θυμίζουμε ότι γέφυρα είναι κάθε ακμή που δεν ανήκει σε κύκλο. Η αφαίρεση μιας γέφυρας από ένα συνεκτικό γράφημα καθιστά το γράφημα μη συνεκτικό δημιουργώντας δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Έστω f ο αριθμός των όψεων του G. Αφού το γράφημα είναι απλό, ο μικρότερος κύκλος έχει μήκος 3. Κάθε όψη περιλαμβάνει λοιπόν τουλάχιστον 3 ακμές. Επομένως, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι τουλάχιστον $3f$. Από την άλλη πλευρά, κάθε ακμή συμμετέχει το πολύ σε δύο όψεις. Επομένως, το άθροισμα των ακμών όλων των όψεων είναι το πολύ $2m$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε

$$3f \leq \text{άθροισμα ακμών όλων των όψεων} \leq 2m \Rightarrow f \leq \tfrac{2}{3}m$$

Συνδυάζοντας τον τύπο του Euler με την παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$m + 2 = n + f \leq n + \tfrac{2}{3}m \Rightarrow \tfrac{1}{3}m \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

Η ανισότητα αυτή είναι ακριβής αφού κάθε απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και όλες του τις όψεις τρίγωνα (δηλ. αποτελούμενες από ακριβώς 3 ακμές την καθεμία) έχει ακριβώς $3n - 6$ ακμές.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, μπορείτε να αποδείξετε ότι κάθε απλό διμερές επίπεδο γράφημα με $n \geq 2$ κορυφές και m ακμές έχει $m \leq 2n - 4$ ακμές. Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι αφού το γράφημα είναι απλό και διμερές, ο μικρότερος κύκλος του έχει μήκος 4 (τα διμερή γραφήματα δεν έχουν κύκλους περιττού μήκους και συνεπώς δεν έχουν τρίγωνα). Έτσι κάθε όψη ενός τέτοιου γραφήματος περιλαμβάνει τουλάχιστον 4 ακμές και $f \leq m/2$. Αντικαθιστώντας στον τύπο του Euler, παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 21. Κατασκευάστε απλά επίπεδα γραφήματα με 6 κορυφές και 12 ακμές, και με 7 κορυφές και 15 ακμές. Επίσης κατασκευάστε απλό επίπεδο διμερές γράφημα με 8 κορυφές και 12 ακμές.

Άσκηση 22. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5.

Λύση. Αφού ο αριθμός των ακμών του γραφήματος είναι το πολύ $3n - 6$, το άθροισμα του βαθμού όλων των κορυφών δεν μπορεί να ξεπερνά το $6n - 12$. Από την αρχή του περιστερώνα, πρέπει να υπάρχει μία κορυφή με βαθμό που δεν ξεπερνά το 5. (Διαφορετικά, υποθέστε ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 6. Το γράφημα θα πρέπει να έχει τουλάχιστον $6n/2 = 3n$ ακμές. Αυτό είναι αντίφαση, αφού κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει το πολύ $3n - 6$ ακμές). □

Άσκηση 23. Να αποδείξετε ότι το K_5 και το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα.

Λύση. Το K_5 δεν είναι επίπεδο γιατί είναι απλό γράφημα και έχει 10 ακμές, αριθμός που ξεπερνά το $3 \times 5 - 6 = 9$. Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, γιατί είναι ένα απλό διμερές γράφημα με 9 ακμές, αριθμός που ξεπερνά το $2 \times 6 - 4 = 8$. □

7.2 Το Θεώρημα του Kuratowski

Απλοποίηση σειράς σε ένα γράφημα είναι η "παράλειψη" μιας κορυφής βαθμού 2 (δηλ. οι δύο ακμές ανάμεσα στις οποίες παρεμβάλλεται μία κορυφή βαθμού 2 αντικαθίστανται από μία ακμή). Παρατηρείστε ότι η απλοποίηση σειράς δεν επηρεάζει την επιπεδότητα του γραφήματος (δηλ. μια απλοποίηση σειράς δεν μπορεί να κάνει επίπεδο ένα γράφημα που δεν είναι ή το αντίστροφο). Δύο γραφήματα είναι *ομοιομορφικά* (homeomorphic) αν μπορούν να *απλοποιηθούν* σε δύο ισομορφικά γραφήματα διενεργώντας μόνο απλοποιήσεις σειράς. Διαισθητικά, τα ομοιομορφικά γραφήματα είναι "τοπολογικά ισοδύναμα".

Παρατηρούμε ότι δύο ομοιομορφικά γραφήματα μπορεί να έχουν διαφορετικό αριθμό κορυφών και ακμών. Όμως ισχύει το ακόλουθο:

Άσκηση 24. Έστω γραφήματα G_1 με n_1 κορυφές και m_1 ακμές και G_2 με n_2 κορυφές και m_2 ακμές. Αν τα G_1 και G_2 είναι ομοιομορφικά, να δείξετε ότι $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Λύση. Αφού τα G_1 και G_2 είναι ομοιομορφικά, μετά από τις κατάλληλες απλοποιήσεις σειράς θα πρέπει να καταλήξουν να είναι ισομορφικά με το ίδιο γράφημα G. Έστω ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές. Παρατηρούμε ότι κάθε απλοποίηση σειράς μειώνει τόσο τον αριθμό των κορυφών όσο και τον αριθμό των ακμών κατά 1. Επομένως, οι απλοποιήσεις σειράς δεν μεταβάλουν τη διαφορά του αριθμού των ακμών από τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος. Αφού το G προκύπτει από το G_1 με απλοποιήσεις σειράς, είναι $m - n = m_1 - n_1$. Ομοίως για το G_2, $n - m = m_2 - n_2$. Εξισώνοντας τα δύο μέλη, έχουμε

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2 \Rightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1 \quad \square$$

Το Θεώρημα του Kuratowski είναι ιδιαίτερα σημαντικό γιατί χαρακτηρίζει την κλάση των επίπεδων γραφημάτων με βάση τα δύο απλούστερα μη-επίπεδα γραφήματα. Συγκεκριμένα, το Θεώρημα του Kuratowski λέει ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με το K_5 ή το $K_{3,3}$. Με απλά λόγια, κάθε μη-επίπεδο γράφημα πρέπει να περιέχει ένα υπογράφημα "τοπολογικά ισοδύναμο" με ένα από τα δύο απλούστερα μη-επίπεδα γραφήματα.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα γράφημα είναι επίπεδο. Υπάρχει *ένας και μόνο* τρόπος: Αποτυπώνουμε / "ζωγραφίζουμε" το γράφημα στο επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται οι ακμές του.

Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο. Γνωρίζετε ήδη δύο τρόπους (και δεν θα μάθετε άλλους!). Ο πρώτος είναι να δείξετε ότι έχει τόσο πολλές ακμές ώστε να παραβιάζει τα πορίσματα του τύπου του Euler (βλ. πως αποδείξαμε ότι τα K_5 και $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδα). Ο δεύτερος είναι να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα του Kuratowski.

8 Δέντρα

Ένα γράφημα χωρίς κύκλους (ακυκλικό) ονομάζεται *δάσος*. Ένα ακυκλικό συνεκτικό γράφημα ονομάζεται *δέντρο*. Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός δάσους είναι δέντρα. Οι κορυφές ενός δέντρου με βαθμό 1 ονομάζονται *φύλλα*, ενώ οι κορυφές με βαθμό μεγαλύτερο του 1 ονομάζονται *εσωτερικές* κορυφές.

Κάθε δέντρο με δύο ή περισσότερες κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα. Ο λόγος είναι ότι ένα δέντρο δεν έχει κύκλους. Έτσι αν θεωρήσουμε ένα μεγιστικό μονοπάτι[8] (δηλαδή ένα μονοπάτι που δεν μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω), οι άκρες του θα έχουν βαθμό 1 και θα είναι φύλλα.

[8] Σε αυτές τις σημειώσεις θεωρούμε μόνο *απλά* μονοπάτια εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Αν από ένα δέντρο αφαιρέσουμε ένα φύλλο (και την προσπίπτουσα ακμή), το αποτέλεσμα θα είναι ένα δέντρο με μία ακμή και μία κορυφή λιγότερες. Ο λόγος είναι ότι η αφαίρεση μιας κορυφής δεν μπορεί να δημιουργήσει κύκλο. Επιπλέον, η αφαίρεση μιας κορυφής με βαθμό ένα δεν μπορεί να επηρεάσει τη συνεκτικότητα του γραφήματος γιατί αυτή η κορυφή (και η προσπίπτουσα ακμή) δεν μπορεί να παρεμβάλεται σε μονοπάτι μεταξύ δύο άλλων κορυφών.

Το παρακάτω θεώρημα απαριθμεί τους πιο γνωστούς χαρακτηρισμούς (δηλαδή ισοδύναμους ορισμούς) των δέντρων. Υπενθυμίζουμε ότι το n συμβολίζει τον αριθμό των κορυφών ενός γραφήματος και το m τον αριθμό των ακμών του.

Θεώρημα 1. *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για κάθε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και m ακμές:*

1. *Το γράφημα G είναι δέντρο.*
2. *Κάθε ζευγάρι κορυφών του G ενώνεται με μοναδικό μονοπάτι.*
3. *Το G είναι* ελαχιστικά συνεκτικό, *δηλ. αν αφαιρεθεί μια ακμή, το γράφημα παύει να είναι συνεκτικό.*
4. *Το G είναι συνεκτικό και $m = n - 1$.*
5. *Το G είναι ακυκλικό και $m = n - 1$.*
6. *Το G είναι* μεγιστικά ακυκλικό, *δηλ. αν προστεθεί μια νέα ακμή, το γράφημα αποκτά κύκλο.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $1 \Rightarrow 2$. Αφού το G είναι συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών. Αν για κάποιο ζευγάρι κορυφών, είχαμε δύο διαφορετικά μονοπάτια, θα είχαμε κύκλο: Τα μονοπάτια κάπου θα ξεχώριζαν, αφού είχαν κοινή αρχή, και κάπου θα έσμιγαν, αφού είχαν κοινό τέλος. Τα ενδιάμεσα τμήματα των δύο μονοπατιών αποτελούν έναν κύκλο.

$2 \Rightarrow 3$ Το γράφημα είναι συνεκτικό από υπόθεση. Αφού έχουμε ένα και μοναδικό μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κορυφών, η αφαίρεση μιας ακμής αίρει τη συνεκτικότητα μεταξύ των άκρων της.

$3 \Rightarrow 4$ Το γράφημα είναι συνεκτικό από υπόθεση. Η απόδειξη για τον αριθμό των ακμών είναι με επαγωγή στον αριθμό των κορυφών. Ο ισχυρισμός είναι τετριμένος αν $n = 1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ισχύει για γραφήματα με αριθμό κορυφών μικρότερο ή ίσο του n. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για γραφήματα με $n + 1$ κορυφές. Αφαιρώντας μια ακμή από το γράφημα, αίρεται η συνεκτικότητα και προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω ότι η πρώτη έχει k κορυφές και η δεύτερη $n - k + 1$. Και οι δύο συνιστώσες είναι ελαχιστικά συνεκτικές. Από επαγωγική υπόθεση, η πρώτη έχει $k - 1$ ακμές και η δεύτερη $n - k$ ακμές. Αν συμπεριλάβουμε και την ακμή που αφαιρέσαμε, το γράφημα είχε $1 + (k - 1) + (n - k) = n = (n + 1) - 1$ ακμές.

$4 \Rightarrow 5$ Πρέπει να δείξουμε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με $n - 1$ ακμές δεν έχει κύκλο. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Ενόσω το γράφημα έχει κύκλους, αφαιρούμε μια ακμή από έναν κύκλο. Αυτό δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Το αποτέλεσμα είναι ένα ακυκλικό συνεκτικό γράφημα, δηλαδή ένα δέντρο με n κορυφές και λιγότερες από $n - 1$ ακμές. Αυτό αποτελεί αντίφαση στο 4 (που έχουμε ήδη αποδείξει).

$5 \Rightarrow 6$ Θα αποδείξουμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό (δηλαδή ότι κάθε ζευγάρι κορυφών συνδέεται με μονοπάτι). Αυτό αρκεί γιατί η προσθήκη μιας νέας ακμής δημιουργεί κύκλο με το μονοπάτι που συνδέει τα άκρα της.

Έστω k ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Θα δείξουμε ότι $k = 1$. Αφού το γράφημα είναι ακυκλικό (έχουμε δηλαδή δάσος), κάθε συνεκτική του συνιστώσα είναι δέντρο. Έστω n_i ο αριθμός των κορυφών της συνεκτικής συνιστώσας i, $i = 1, \dots, k$. Αφού πρόκειται για δέντρο, η συνεκτική συνιστώσα i έχει $m_i = n_i - 1$ ακμές (από το 4 που έχουμε ήδη αποδείξει). Είναι

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k \Rightarrow k = 1$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει από την υπόθεση ότι $m = n - 1$, και η τελευταία ισότητα πριν τη συνεπαγωγή γιατί $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$6 \Rightarrow 1$ Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε μεγιστικά ακυκλικό γράφημα είναι συνεκτικό. Έστω δύο κορυφές u και v ενός μη συνεκτικού άκυκλου γραφήματος. Η προσθήκη της ακμής $\{u, v\}$ δεν δημιουργεί κύκλο. Συνεπώς, αν το γράφημα δεν είναι συνεκτικό δεν μπορεί να είναι μεγιστικά ακυκλικό. □

Είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε το Θεώρημα 1 και την απόδειξη του γιατί ουσιαστικά εξηγούν τι είναι δέντρο και ποιες είναι οι βασικές ιδιότητές του. Επίσης, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην επίλυση ασκήσεων.

Τα παρακάτω πορίσματα προκύπτουν εύκολα από το Θεώρημα 1. Αφήνεται σαν άσκηση η διατύπωση πλήρους απόδειξης για καθένα από αυτά.

Πόρισμα 1. *Κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και n ακμές έχει τουλάχιστον ένα κύκλο.*

Πόρισμα 2. *Κάθε γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από $n - 1$ ακμές δεν είναι συνεκτικό.*

8.1 Παραδείγματα και Ασκήσεις

Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{k,\ell}$ είναι δέντρο ανν είτε $k = 1$ είτε $\ell = 1$. Το $K_{2,2}$ έχει κύκλο (είναι ουσιαστικά το C_4) και δεν είναι δέντρο.

Κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα. Ξεκινάμε βάζοντας μια κορυφή στη δεξιό σύνολο, τους γείτονές της στο αριστερό, τους γείτονες των γειτόνων της στο δεξιό, κοκ. Η διαδικασία είναι ισοδύναμη με την Αναζήτηση κατά Πλάτος. Αφού το δέντρο είναι συνεκτικό όλες οι κορυφές θα μπουν σε ένα από τα δύο σύνολα. Επειδή το γράφημα είναι ακυκλικό, το δεξιό και το αριστερό σύνολο είναι ανεξάρτητα σύνολα.

Κάθε δέντρο είναι επίπεδο γράφημα γιατί δεν περιέχει κύκλους. Έτσι δεν μπορεί να έχει γράφημα ομοιομορφικό με το $K_{3,3}$ ή το K_5 (τα οποία έχουν κύκλους). Τα δέντρα αποτελούν τη βασική περίπτωση στην απόδειξη του τύπου του Euler με επαγωγή στον αριθμό των όψεων. Συγκεκριμένα, ένα δέντρο με n κορυφές έχει μία όψη (την εξωτερική) και $n - 1$ ακμές. Συνεπώς, $n + 1 = (n - 1) + 2$ όπως απαιτεί ο τύπος του Euler.

Μια ακμή ενός γραφήματος ονομάζεται *ακμή τομής* (ή *γέφυρα*) αν η αφαίρεσή της αίρει τη συνεκτικότητα (ισοδύναμα, αν δεν ανήκει σε κάποιον κύκλο). Κάθε ακμή ενός δέντρου είναι ακμή τομής. Η αφαίρεση μιας ακμής ενός δέντρου δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες: η μία περιέχει το ένα άκρο της ακμής που αφαιρέθηκε και η άλλη το άλλο. Επίσης, η προσθήκη μιας ακμής σε ένα δέντρο δημιουργεί έναν απλό κύκλο αποτελούμενο από τη νέα ακμή και το μονοπάτι που συνδέει τα άκρα της.

Άσκηση 25. Ένα δέντρο έχει δύο φύλλα αν και μόνο αν είναι ένα απλό μονοπάτι.

Λύση. Κάθε απλό μονοπάτι είναι δέντρο και έχει δύο φύλλα, τα άκρα του. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα δέντρο $G(V, E)$ με n κορυφές, μόνο δύο από τις οποίες είναι φύλλα, κάθε εσωτερική κορυφή του δέντρου έχει βαθμό 2. Πράγματι, το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2(n-1)$. Έστω u_1 και u_2 τα φύλλα (τα οποία εξ' ορισμού έχουν βαθμό 1). Τότε

$$\sum_{v \in V \setminus \{u_1, u_2\}} \deg(v) = 2(n-2)$$

Αφού οι εσωτερικές κορυφές είναι $n-2$ και έχουν βαθμό τουλάχιστον 2, ο μόνος τρόπος να ισχύει η παραπάνω ισότητα είναι όλες οι εσωτερικές κορυφές να έχουν βαθμό 2. Συνεπώς, το γράφημα είναι ένα απλό μονοπάτι με n κορυφές. □

Άσκηση 26. Ένα δέντρο με μέγιστο βαθμό k έχει τουλάχιστον k φύλλα.

Λύση. Έστω ℓ ο αριθμός των φύλλων. Έχουμε τουλάχιστον 1 κορυφή με βαθμό k, $n - \ell - 1$ κορυφές με βαθμό τουλάχιστον 2, και ℓ κορυφές με βαθμό 1. Το άθροισμα των βαθμών είναι $2(n-1)$. Επομένως, έχουμε

$$2(n-1) \geq k + 2(n - \ell - 1) + \ell = k + 2(n-1) - \ell \Rightarrow \ell \geq k$$

δηλαδή ο αριθμός των φύλλων δεν μπορεί να υπολείπεται του μέγιστου βαθμού. □

Γενικότερα, αν ένα δέντρο με n κορυφές έχει μόνο φύλλα και κορυφές βαθμού δ, τότε ο αριθμός των φύλλων, έστω ℓ, είναι $\ell = \frac{(\delta-2)n+2}{\delta-1}$.

Άσκηση 27. Έστω δέντρο με 4 κορυφές βαθμού 10. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός φύλλων που υπάρχουν στο δέντρο; (Απάντηση. Τουλάχιστον 34).

Άσκηση 28. Έστω δέντρο με $2k$ φύλλα, $3k$ κορυφές βαθμού 2, και k κορυφές βαθμού 3. Πόσες κορυφές έχει το δέντρο;

Λύση. Ο συνολικός αριθμός των κορυφών είναι $6k$ και το άθροισμα των βαθμών είναι $11k$. Ισχύει ότι $11k = 2(6k-1) \Rightarrow k = 2$. Δηλαδή το δέντρο έχει 12 κορυφές. Αφήνεται σαν άσκηση η απεικόνιση αυτού του δέντρου. □

Άσκηση 29. Έστω γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και k συνεκτικές συνιστώσες. Να δείξετε ότι $k \geq n - m$.

Λύση. Αφού κάθε γράφημα έχει τουλάχιστον 1 συνεκτική συνιστώσα, η ανισότητα είναι μη-τετριμένη μόνο όταν $m \leq n-1$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στον αριθμό των ακμών. Όταν δεν υπάρχει καμία ακμή και $m = 0$, έχουμε n απομονωμένες κορυφές που καθεμία συγκροτεί μία συνεκτική συνιστώσα. Επομένως, η ανισότητα ισχύει για $m = 0$.

Το επαγωγικό βήμα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι μια νέα ακμή συνδέει κορυφές που βρίσκονται είτε στην ίδια συνεκτική συνιστώσα είτε σε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Στην πρώτη περίπτωση ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών παραμένει αμετάβλητος, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών μειώνεται κατά 1. Έτσι η μεταβολή στο αριστερό μέλος της ανισότητας είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη μεταβολή στο δεξιό της μέλος και η ανισότητα συνεχίζει να ισχύει. Η διατύπωση των λεπτομερειών αφήνεται ως άσκηση. □

Άσκηση 30. Έστω δένδρο T με p_i κορυφές βαθμού i, $i = 1, \ldots, k$ (k είναι ο μέγιστος βαθμός του T). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των φύλλων δίνεται από τη σχέση $2 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \ldots + (k-2)p_k$

Λύση. Ο αριθμός των φύλλων είναι p_1 (αριθμός των κορυφών βαθμού 1), ο συνολικός αριθμός των κορυφών του T είναι $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k$, και το άθροισμα των βαθμών τους είναι $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots k\,p_k$. Αφού το T είναι δέντρο, ο αριθμών των ακμών του είναι $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k - 1$. Συνεπώς,

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots k\,p_k = 2(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k - 1) \Rightarrow p_1 = 2 + p_3 + 2p_4 + 3p_5 + \ldots + (k-2)p_k$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. □

9 Δέντρα με Ρίζα

Αν ορίσουμε μια κορυφή του δέντρου σαν *ρίζα*, τότε έχουμε ένα *δέντρο με ρίζα*.

Σε ένα δέντρο με ρίζα, οι *πρόγονοι* μιας κορυφής v είναι όλες οι κορυφές στο μονοπάτι από τη ρίζα προς τη v. Ο *πατέρας* της v είναι ο μοναδικός πρόγονος που έχει ακμή προς της v. Οι *απόγονοι* της v είναι όλες οι κορυφές για τις οποίες η v αποτελεί πρόγονο. Τα *παιδιά* της v είναι όλες οι κορυφές για τις οποίες η v αποτελεί πατέρα. Τα *αδέλφια* της v είναι όλες οι κορυφές που έχουν κοινό πατέρα με τη v. Το *βάθος* της v είναι το μήκος του μονοπατιού από τη ρίζα προς τη v. Το ύψος ενός δέντρου με ρίζα είναι το μέγιστο βάθος ενός φύλλου του.

Ένα δέντρο με ρίζα ονομάζεται *m-αδικό* όταν κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά. Ένα m-αδικό δέντρο ονομάζεται *γεμάτο* (full) (ή κανονικό) όταν κάθε εσωτερική κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά. Η ρίζα ενός κανονικού m-αδικού δέντρου έχει βαθμό m και οι υπόλοιπες εσωτερικές κορυφές έχουν βαθμό $m+1$. Ένα m-αδικό δέντρο ονομάζεται *πλήρες* (complete) όταν είναι γεμάτο και όλα του τα φύλλα έχουν ακριβώς το ίδιο βάθος. Ένα m-αδικό δέντρο ύψους h έχει τουλάχιστον $h+1$ κορυφές. Επίσης, έχει 1 κορυφή ύψους 0 (τη ρίζα), το πολύ m κορυφές ύψους 1, το πολύ m^2 κορυφές ύψους 2, …, και το πολύ m^h κορυφές ύψους h. Συνολικά, το δέντρο έχει το πολύ

$$\sum_{i=0}^{h} m^i = \frac{m^{h+1}-1}{m-1} \quad \text{κορυφές.}$$

Μάλιστα, το πλήρες m-αδικό δέντρο ύψους h έχει ακριβώς $\frac{m^{h+1}-1}{m-1}$ κορυφές από τις οποίες m^h είναι φύλλα.

Με βάση τα παραπάνω, κάθε δυαδικό δέντρο ύψους h έχει το πολύ 2^h φύλλα και συνολικά το πολύ $2^{h+1}-1$ κορυφές. Το πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους h έχει ακριβώς $2^{h+1}-1$ κορυφές από τις οποίες 2^h είναι φύλλα και $2^h - 1$ είναι εσωτερικές. Αντίστροφα, κάθε δυαδικό δέντρο με n κορυφές έχει ύψος τουλάχιστον $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ και το πολύ $n-1$.

Τα δέντρα με ρίζα δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικά από θεωρητικής άποψης. Όμως, τα m-αδικά (και ιδιαίτερα τα δυαδικά) δέντρα με ρίζα έχουν πολύ σημαντικές πρακτικές εφαρμογές.

9.1 Δυαδικά Δέντρα Αναζήτησης

Ας θεωρήσουμε ένα δυαδικό δέντρο που οι κορυφές του περιέχουν στοιχεία για τα οποία ισχύει μια σχέση μερικής διάταξης. Τα στοιχεία μπορεί να είναι αριθμοί, γράμματα, λέξεις, ή γενικότερα να αποτελούν τους μοναδικούς κωδικούς (κλειδιά) των εγγραφών μιας σχέσης σε μια βάση δεδομένων.

Ένα τέτοιο δέντρο ονομάζεται *δυαδικό δέντρο αναζήτησης* όταν το στοιχείο κάθε εσωτερικής κορυφής είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του αριστερού της υποδέντρου (δηλ. το υποδέντρο με ρίζα το αριστερό παιδί της κορυφής) και μικρότερο από όλα τα στοιχεία στο δεξιό της υποδέντρο (δηλ. το υποδέντρο με ρίζα το δεξιό παιδί της κορυφής)

Η αποθήκευση των στοιχείων σε ένα *ζυγισμένο* δυαδικό δέντρο αναζήτησης[9] επιτρέπει την εύκολη και γρήγορη αναζήτησή τους. Αν το στοιχείο που ζητάμε είναι μικρότερο από το στοιχείο μιας κορυφής, προχωρούμε στο αριστερό της παιδί. Αν είναι μεγαλύτερο προχωρούμε στο δεξιό της παιδί. Αυτή η (αναδρομική) διαδικασία ξεκινάει από τη ρίζα και συνεχίζεται μέχρι να βρούμε το στοιχείο ή να μην μπορούμε να προχωρήσουμε άλλο. Στη δεύτερη περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο στοιχείο δεν υπάρχει στο δέντρο.

Για να κατασκευάσουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, εισάγουμε κάθε νέο στοιχείο (που δεν υπάρχει ήδη στο δέντρο) στο σημείο που θα περιμέναμε να το βρούμε. Με άλλα λόγια, το νέο στοιχείο εισάγεται σαν παιδί της κορυφής στην οποία μας οδήγησε η παραπάνω διαδικασία αναζήτησης. Το νέο στοιχείο γίνεται αριστερό (δεξιό) παιδί αν είναι μικρότερο (αντίστοιχα μεγαλύτερο) από το στοιχείο της συγκεκριμένης κορυφής.

Άσκηση 31. Έστω κανονικό m-αδικό δέντρο με n κορυφές, από τις οποίες οι ℓ είναι φύλλα και οι i εσωτερικές κορυφές. Να αποδείξετε ότι: (α) $n = m\,i + 1$, (β) $i\,(m-1) = \ell - 1$, και (γ) $m\,\ell = (m-1)\,n + 1$.

Λύση. Για το (α), παρατηρούμε ότι όλες οι εσωτερικές κορυφές έχουν εξερχόμενο βαθμό m και τα φύλλα έχουν εξερχόμενο βαθμό 0. Συνεπώς, το άθροισμα των εξερχόμενων βαθμών είναι $i\,m$. Από την άλλη, το άθροισμα των εξερχόμενων βαθμών είναι ίσο με τον αριθμό των ακμών, δηλαδή με $n-1$. Συνεπώς, $n - 1 = i\,m$ όπως απαιτείται.

Το (β) προκύπτει από το (α) θέτοντας $n = i + \ell$. Το (γ) προκύπτει από το $m\,\ell = m\,n - m\,i$ αντικαθιστώντας με $m\,i = n - 1$ από το (α). □

Άσκηση 32. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης ονομάζεται AVL-δέντρο όταν το ύψος των δύο υποδέντρων κάθε εσωτερικής κορυφής διαφέρει το πολύ κατά 1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός κορυφών n ενός AVL-δέντρου με ύψος h επαληθεύει την ανισότητα:

$$F_{h+1} \le n \le 2^{h+1} - 1$$

όπου F_{h+1} είναι ο $(h+1)$-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci. Υπενθυμίζεται ότι η ακολουθία Fibonacci ορίζεται από την αναδρομική σχέση $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, για κάθε φυσικό αριθμό $k \ge 3$, με αρχικές συνθήκες $F_1 = F_2 = 1$.

[9] Λέμε ότι ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης με n κορυφές είναι ζυγισμένο όταν το ύψος του είναι $O(\log n)$.

Λύση. Ο μεγαλύτερος αριθμός κορυφών συμβαίνει όταν έχουμε το πλήρες δυαδικό δέντρο με ύψος h (το πλήρες δυαδικό δέντρο είναι ένα AVL-δέντρο γιατί τα δύο υποδέντρα κάθε εσωτερικής κορυφής έχουν το ίδιο ύψος). Το πλήρες δυαδικό δέντρο έχει $2^{h+1} - 1$ κορυφές. Συνεπώς, κάθε AVL-δέντρο με ύψος h έχει $n \leq 2^{h+1} - 1$.

Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή στο ύψος του δέντρου. Έστω $n_{\min}(h)$ ο ελάχιστος αριθμός αριθμός κορυφών ενός AVL-δέντρου με ύψος h (παρατηρείστε ότι η ποσότητα $n_{\min}(h)$ δεν μπορεί να μειώνεται όσο αυξάνεται το ύψος του δέντρου). Θα αποδείξουμε ότι $n_{\min}(h) \geq F_{h+1}$. Όταν το ύψος είναι μικρότερο ή ίσο του 1, το δέντρο θα έχει τουλάχιστον μία κορυφή. Επομένως ισχύει ότι $n_{\min}(1) \geq F_2$ και $n_{\min}(0) \geq F_1$. Υποθέτουμε επαγωγικά ότι ισχύει το ζητούμενο για κάθε δέντρο με ύψος μικρότερο ή ίσο του h, και θεωρούμε δέντρο με ύψος $h + 1 \geq 2$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $n_{\min}(h + 1) \geq F_{h+2}$.

Για να έχει η ρίζα ύψος $h + 1$, πρέπει τουλάχιστον ένα από τα υποδέντρα της να έχει ύψος h. Από τον ορισμό των AVL-δέντρων, το άλλο υποδέντρο θα έχει ύψος τουλάχιστον $h - 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι τα δύο υποδέντρα επαληθεύουν τον ορισμό των AVL-δέντρων. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός κορυφών για ένα τέτοιο δέντρο είναι:

$$n_{\min}(h + 1) \geq n_{\min}(h) + n_{\min}(h - 1) + 1 \geq F_{h+1} + F_h + 1 \geq F_{h+2}$$

(δηλ. το άθροισμα του ελάχιστου αριθμού των κορυφών των δύο υποδέντρων συν τη ρίζα). Η δεύτερη ανισότητα έπεται από την επαγωγική υπόθεση. Επομένως, κάθε AVL-δέντρο με ύψος h έχει $n \geq F_{h+1}$.

Λογαριθμώντας, προκύπτει ότι το ύψος ενός AVL-δέντρου με n κορυφές (ή n στοιχεία αφού πρόκειται για ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης) είναι $\Theta(\log n)$ (για την ακρίβεια ισχύει ότι $\log_2(n + 1) \leq h + 1 \leq 1.44 \log_2(n + 1)$). Δηλαδή αποδείξαμε ότι τα AVL-δέντρα είναι ζυγισμένα δέντρα. □

9.2 Διελεύσεις Δέντρων

Υπάρχουν (τουλάχιστον) τρεις διαφορετικοί συστηματικοί αναδρομικοί τρόποι (διελεύσεις ή διασχίσεις - traversals) να τυπώσουμε όλες τις κορυφές ενός δυαδικού δέντρου με ρίζα.

Η *προ-διατεταγμένη* διέλευση (preorder) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τη Ρίζα, μετά τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, και τέλος τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου. Συμβολικά Ρίζα-Αριστερό-Δεξί.

Η *ενδο-διατεταγμένη* διέλευση (inorder) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, μετά τη Ρίζα, και τέλος τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου. Συμβολικά Αριστερό-Ρίζα-Δεξί. Όταν έχουμε ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, η ενδο-διατεταγμένη διέλευση τυπώνει τα στοιχεία του δέντρου σε αύξουσα σειρά. Η αντίστροφη ενδο-διατεταγμένη διέλευση Δεξί-Ρίζα-Αριστερό σε φθίνουσα σειρά). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με επαγωγή στο ύψος του δέντρου. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Η *μετά-διατεταγμένη* διέλευση (postorder) λειτουργεί αναδρομικά τυπώνοντας πρώτα τα στοιχεία του Αριστερού υποδέντρου, μετά τα στοιχεία του Δεξιού υποδέντρου, και τέλος τη Ρίζα. Συμβολικά Αριστερό-Δεξί-Ρίζα.

Παρατηρείστε ότι το Αριστερό υποδέντρο προηγείται πάντα του Δεξιού. Ο μνημονικός κανόνας είναι ότι το πρόθεμα που καθορίζει το είδος της διέλευσης (προ-, ενδο-, μετά-) δείχνει πότε εξετάζουμε τη Ρίζα σε σχέση με τα στοιχεία του Αριστερού και του Δεξιού υποδέντρου (πριν, ενδιάμεσα, μετά).

10 Συνδετικά Δέντρα

Κάθε υπογράφημα που είναι δέντρο και περιλαμβάνει (συνδέει) όλες τις κορυφές ενός γραφήματος ονομάζεται *συνδετικό δέντρο* (spanning tree) του γραφήματος.

Θεώρημα 2. *Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν έχει ένα συνδετικό δέντρο.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει ένα υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος και είναι δέντρο (άρα συνεκτικό), τότε το γράφημα δεν μπορεί παρά να είναι συνεκτικό (αφού η προσθήκη άλλων ακμών "ενισχύει" τη συνεκτικότητα).

Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, θεωρούμε ένα υπογράφημα T που αρχικά συμπίπτει με το γράφημα. Επομένως, το T καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Ενόσω το T έχει κύκλους, αφαιρούμε μία ακμή που βρίσκεται σε κύκλο (δηλαδή μια ακμή που δεν είναι γέφυρα). Το T παραμένει συνεκτικό αφού η αφαίρεση μιας ακμής που βρίσκεται σε κύκλο δεν αίρει τη συνεκτικότητα. Αυτή η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν το T γίνει ακυκλικό. Σε αυτή τη φάση, το T παραμένει συνεκτικό (από την κατασκευή) και συνεχίζει να καλύπτει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος (αφού ποτέ δεν αφαιρέσαμε κάποια κορυφή). Συνεπώς, το υπογράφημα που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία είναι ένα συνδετικό δέντρο του αρχικού γραφήματος. □

Από το Θεώρημα 1, κάθε συνδετικό δέντρο ενός γραφήματος με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές. Με άλλα λόγια, όλα τα συνδετικά δέντρα ενός γραφήματος έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών. Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 δίνει έναν τρόπο να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο ενός συνεκτικού γραφήματος.

11 k-Παράγοντες και Ταιριάσματα

Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ένα επικαλύπτον (spanning) υπογράφημα όπου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του k ονομάζεται *k-παράγοντας* του G (k-factor). Ένας k-παράγοντας ονομάζεται *τέλειος* (perfect) όταν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ακριβώς k. Οι πιο σημαντικοί παράγοντες ενός γραφήματος είναι οι 1-παράγοντες και οι 2-παράγοντες.

Μια διαμέριση των κορυφών του G σε απλούς κύκλους και απλά μονοπάτια συνιστά έναν 2-παράγοντα. Μια διαμέριση των κορυφών του G σε κύκλους συνιστά έναν τέλειο 2-παράγοντα. Ένας κύκλος Hamilton αποτελεί έναν τέλειο 2-παράγοντα (και μάλιστα συνεκτικό). Αντίστροφα, κάθε συνεκτικός τέλειος 2-παράγοντας ενός γραφήματος είναι κύκλος Hamilton. Επομένως, ο υπολογισμός του τέλειου 2-παράγοντα με τον ελάχιστο αριθμό κύκλων/συνεκτικών συνιστωσών αποτελεί ισοδύναμο πρόβλημα με το να αποφανθούμε αν ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Οι 1-παράγοντες του G ονομάζονται *ταιριάσματα* (matchings). Ισοδύναμα, ένα υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ ονομάζεται ταίριασμα του G όταν κάθε κορυφή εφάπτεται σε μία το πολύ ακμή του M (με απλά λόγια, οι ακμές του M δεν έχουν κοινά άκρα). Θα λέμε ότι μια κορυφή που εφάπτεται σε ακμή του M έχει *ταίρι* ή είναι *ταιριασμένη* (matched) στο M. Μια κορυφή που δεν έχει ταίρι θα λέμε ότι είναι *ελεύθερη* (free) στο M.

Τέλεια, Μέγιστα, και Μεγιστικά Ταιριάσματα. Ένα ταίριασμα ονομάζεται *τέλειο* (perfect matching) όταν όλες οι κορυφές έχουν ταίρι στο M. Ένα ταίριασμα ονομάζεται *μέγιστο* (maximum matching) αν δεν υπάρχει ταίριασμα με μεγαλύτερο αριθμό ακμών. Κάθε τέλειο ταίριασμα είναι μέγιστο, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει (να δώσετε συγκεκριμένα παραδείγματα). Ένα ταίριασμα M ονομάζεται *μεγιστικό* (maximal) αν δεν υπάρχει ακμή στο $E \setminus M$ (δηλ. εκτός M) που να έχει ελεύθερες κορυφές σαν άκρα.

Πρόταση 2. *Ένα ταίριασμα M είναι μεγιστικό αν και μόνο αν οι ελεύθερες κορυφές στο M αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο.*

Η Πρόταση 2 προτείνει τον ακόλουθο απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός μεγιστικού ταιριάσματος. Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε ταίριασμα (π.χ. κενό σύνολο ακμών). Ενόσω οι ελεύθερες κορυφές του τρέχοντος ταιριάσματος δεν αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο, προσθέτουμε μια ακμή με ελεύθερα άκρα στο ταίριασμα. Όταν ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος, έχουμε ένα μεγιστικό ταίριασμα.

Εναλλακτικά και Επαυξητικά Μονοπάτια. Έστω M ταίριασμα στο γράφημα $G(V, E)$. Ένα μονοπάτι του G του οποίου οι ακμές εναλλάσσονται στα σύνολα $E \setminus M$ και M ονομάζεται *εναλλακτικό* (alternating) μονοπάτι για το M. Ένα εναλλακτικό μονοπάτι με άκρα ελεύθερες κορυφές ονομάζεται *επαυξητικό* (augmenting) μονοπάτι για το M.

Έστω p ένα επαυξητικό μονοπάτι για το M. οι ακμές του p που δεν ανήκουν στο M δεν έχουν κοινά άκρα, γιατί οι ακμές του $p \setminus M$ και του M εναλλάσσονται. Επομένως, οι ακμές του $p \setminus M$ αποτελούν ταίριασμα και καλύπτουν όλες τις κορυφές του p. Οι ακμές του $p \setminus M$ είναι κατά μία περισσότερες από τις ακμές του $p \cap M$, γιατί τα δύο άκρα του p είναι ελεύθερες κορυφές. Οι ταιριασμένες κορυφές στο $M \setminus (p \cap M)$ είναι διαφορετικές από τις ταιριασμένες κορυφές στο $p \setminus M$, αφού το $M \setminus (p \cap M)$ αποτελείται από τις ακμές του M που δεν ανήκουν στο p. Συνεπώς, το σύνολο $(M \setminus (p \cap M)) \cup (p \setminus M)$ αποτελεί ταίριασμα στο G και έχει $|M| + 1$ ακμές (δηλαδή μία ακμή περισσότερη από το M). Από το γεγονός αυτό προέρχεται η ονομασία του επαυξητικού μονοπατιού.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $(M \setminus (p \cap M)) \cup (p \setminus M)$ ταυτίζεται με το σύνολο $(M \cup p) \setminus (M \cap p)$. Το τελευταίο αποτελεί τη λεγόμενη *συμμετρική διαφορά* των συνόλων M και p. Υπενθυμίζουμε ότι η συμμετρική διαφορά των συνόλων M και p συμβολίζεται με $M \oplus p$ και αποτελείται από όλα τα διαφορετικά στοιχεία των δύο συνόλων. Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 3. *Για κάθε ταίριασμα M και κάθε επαυξητικό μονοπάτι p για το M, το $M \oplus p$ αποτελεί ταίριασμα με $|M| + 1$ ακμές.*

Χαρακτηρισμός Μέγιστων Ταιριασμάτων

Θεώρημα 3 (Berge). *Ένα ταίριασμα M είναι μέγιστο αν και μόνο αν δεν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι για το M.*

Απόδειξη. Έστω M ταίριασμα στο γράφημα $G(V, E)$. Ισοδύναμα, θα αποδείξουμε ότι το M δεν είναι μέγιστο αν και μόνο αν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι για το M (αντιθετο-αντιστροφή).

Αν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι p για το M, έχουμε ήδη αποδείξει (Πρόταση 3) ότι το $M \oplus p$ αποτελεί ταίριασμα με μια ακμή περισσότερη από το M. Συνεπώς, το M δεν είναι μέγιστο.

Για το αντίστροφο, έστω ότι το M δεν είναι μέγιστο και έστω ένα μέγιστο ταίριασμα M' για το γράφημα $G(V, E)$. Εξ' ορισμού είναι $|M'| > |M|$ (δηλ. το M' έχει περισσότερες ακμές από το M). Στο υπογράφημα $G(V, M \cup M')$, κάθε κορυφή έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Δηλαδή, το $M \cup M'$ είναι ένας 2-παράγοντας του G. Άρα το $G(V, M \cup M')$ αποτελείται από (απλούς) κύκλους και (απλά) μονοπάτια στα οποία οι ακμές του M' εναλλάσσονται με τις ακμές του M (επειδή και τα M' και M είναι ταιριάσματα).

Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος στο $G(V, M \cup M')$ έχει ίδιο αριθμό ακμών από το M και το M' και ότι μόνο ένα μονοπάτι μπορεί να έχει περισσότερες ακμές από κάποιο από τα δύο ταιριάσματα. Επειδή λοιπόν το M' έχει περισσότερες ακμές από το M, το $G(V, M \cup M')$ πρέπει να περιέχει μονοπάτι p στο οποίο οι ακμές του M' να είναι περισσότερες από τις ακμές του M. Αφού στο p εναλλάσσονται οι ακμές των M' και M, ο μόνος τρόπος να συμβεί αυτό είναι οι αρχική και τελική ακμή του p να ανήκουν στο M'.

Επομένως, οι ακμές του p εναλλάσσονται στα $E \setminus M$ και M, και τα άκρα του p είναι ελεύθερα στο M. Άρα το p είναι επαυξητικό μονοπάτι για το M στο γράφημα G. □

Το Θεώρημα του Berge προτείνει την ακόλουθη μεθοδολογία υπολογισμού ενός μέγιστου ταιριάσματος: Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε ταίριασμα (π.χ. το κενό σύνολο ακμών ή ένα μεγιστικό ταίριασμα). Έστω M το τρέχον ταίριασμα σε κάθε βήμα του αλγόριθμου. Ενόσω το M δεν είναι μέγιστο ταίριασμα, βρίσκουμε ένα επαυξητικό μονοπάτι p (το Θεώρημα 3 εγγυάται την ύπαρξη επαυξητικού μονοπατιού). Αντικαθιστούμε το τρέχον ταίριασμα με το $M \oplus p$, που είναι ταίριασμα και έχει μια ακμή παραπάνω. Όταν η παραπάνω διαδικασία ολοκληρωθεί, έχουμε ένα μέγιστο ταίριασμα.

Δυστυχώς, η απόδειξη του Θεωρήματος του Berge δεν είναι κατασκευαστική αφού δεν περιγράφει πως μπορούμε να υπολογίσουμε ένα επαυξητικό μονοπάτι για ένα ταίριασμα που δεν είναι μέγιστο.

12 Ανεξάρτητα Σύνολα και Καλύμματα Κορυφών

Ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V$ ενός γραφήματος $G(V, E)$ ονομάζεται *ανεξάρτητο σύνολο* (independent set) αν δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ αυτών των κορυφών. Ένα ανεξάρτητο σύνολο είναι *μέγιστο* (Maximum Independent Set - MIS) όταν το γράφημα δεν έχει ανεξάρτητο σύνολο με περισσότερες κορυφές. Ο αριθμός των κορυφών (ή το μέγεθος) του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου ονομάζεται *αριθμός ανεξαρτησίας* (independence number) του γραφήματος G και συμβολίζεται με $\alpha(G)$. Ένα σύνολο κορυφών S είναι ανεξάρτητο σύνολο στο G αν και μόνο αν το S είναι μια κλίκα, δηλαδή ένα πλήρες υπογράφημα, στο συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$.

Ένα σύνολο κορυφών $C \subseteq V$ ονομάζεται *κάλυμμα κορυφών* (vertex cover) όταν κάθε ακμή του γραφήματος έχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα της στο C. Ένα κάλυμμα κορυφών είναι *ελάχιστο* (Minimum Vertex Cover - MVC) όταν το γράφημα δεν έχει κάλυμμα κορυφών με λιγότερες κορυφές. Ο αριθμός των κορυφών (ή το μέγεθος) του ελάχιστου καλύμματος κορυφών ονομάζεται *αριθμός κάλυψης* (covering number) του γραφήματος και συμβολίζεται με $\beta(G)$.

Πρόταση 4. *Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ένα σύνολο κορυφών $S \subseteq V$ είναι ανεξάρτητο σύνολο του G αν και μόνο αν το σύνολο $V \setminus S$ αποτελεί κάλυμμα κορυφών.*

Απόδειξη. Εξ' ορισμού, το S είναι ανεξάρτητο σύνολο αν και μόνο αν δεν υπάρχει καμία ακμή που έχει και τα δύο άκρα της στο S. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα της στο $V \setminus S$, δηλαδή αν και μόνο αν το $V \setminus S$ αποτελεί κάλυμμα κορυφών. □

Πρόταση 5. *Σε κάθε γράφημα* $G(V, E)$, $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

Απόδειξη. Έστω S ένα μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του G. Εξ' ορισμού είναι $|S| = \alpha(G)$. Από την Πρόταση 4, το $V \setminus S$ αποτελεί κάλυμμα κορυφών, και επομένως $\beta(G) \leq n - \alpha(G) \Rightarrow \alpha(G) \leq n - \beta(G)$.

Έστω C ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών του G. Εξ' ορισμού είναι $|C| = \beta(G)$. Από την Πρόταση 4, το $V \setminus C$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο, και επομένως $\alpha(G) \geq n - \beta(G)$. Το ζητούμενο προκύπτει συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες. □

Μια άμεση συνέπεια της Πρότασης 5 είναι ότι ένα ανεξάρτητο σύνολο S είναι μέγιστο αν και μόνο αν το κάλυμμα κορυφών $V \setminus S$ είναι ελάχιστο.

Ο υπολογισμός ενός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου σε γενικά γραφήματα είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα (από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας). Ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο προκύπτει εύκολα αν ξεκινήσουμε με ένα ανεξάρτητο σύνολο S (π.χ. αρχικά το κενό σύνολο). Ενόσω υπάρχει κορυφή $v \in V \setminus S$ που δεν συνδέεται με καμία κορυφή του S, αντικαθιστούμε το S με το $S \cup \{v\}$ και συνεχίζουμε. Αυτή η επαναληπτική διαδικασία τερματίζει με ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο S (αν προσθέσουμε οποιαδήποτε κορυφή στο S, αυτό παύει να είναι ανεξάρτητο σύνολο).

Κατ' αναλογία, ο υπολογισμός ενός ελάχιστου καλύμματος κορυφών είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα (από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας). Είναι όμως σχετικά απλό να υπολογίσουμε ένα σύνολο κάλυψης που έχει το πολύ $2\beta(G)$ κορυφές.

Υπολογίζουμε ένα μεγιστικό ταίριασμα M. Γνωρίζουμε ότι οι ελεύθερες κορυφές του M αποτελούν ένα ανεξάρτητο σύνολο. Συνεπώς, οι κορυφές που είναι ταιριασμένες στο M αποτελούν κάλυμμα κορυφών. Έστω λοιπόν C το κάλυμμα κορυφών που αποτελείται από τις ταιριασμένες κορυφές στο M. Είναι $|C| = 2|M|$ (για κάθε ακμή του M έχουμε τα δύο άκρα της στο C). Όμως είναι $\beta(G) \geq |M|$ γιατί κάθε κάλυμμα κορυφών (του ελάχιστου συμπεριλαμβανομένου) περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα από τα δύο άκρα κάθε ακμής του M. Διαφορετικά, η συγκεκριμένη ακμή του M θα ήταν ακάλυπτη. Συνεπώς, $|C| = 2|M| \leq 2\beta(G)$.

Είδαμε λοιπόν ότι για κάθε ταίριασμα M και κάθε κάλυμμα κορυφών C, ισχύει ότι $|M| \leq |C|$. Ο λόγος είναι ότι το κάλυμμα κορυφών πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα από τα δύο άκρα κάθε ακμής του ταιριάσματος. Μάλιστα η ισότητα αποτελεί κριτήριο βελτιστότητας (optimality criterion) τόσο για ένα ταίριασμα όσο και για το αντίστοιχο κάλυμμα κορυφών.

Πρόταση 6. *Έστω ταίριασμα M και κάλυμμα κορυφών C τέτοια ώστε $|M| = |C|$. Τότε το M αποτελεί ένα μέγιστο ταίριασμα και το C αποτελεί ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών.*

Απόδειξη. Έστω M^* ένα μέγιστο ταίριασμα και C^* ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών. Ισχύει ότι

$$|M| \leq |M^*| \leq |C^*| \leq |C|$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί το M^* είναι ένα μέγιστο ταίριασμα, η δεύτερη γιατί το μέγεθος κάθε καλύμματος κορυφών είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το μέγεθος κάθε ταιριάσματος, και η τρίτη ανισότητα γιατί το C^* είναι ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών. Αφού υποθέσαμε ότι $|M| = |C|$, όλες οι παραπάνω ανισότητες πρέπει να είναι ισότητες. Έτσι $|M| = |M^*|$ και $|C^*| = |C|$. □

Η παραπάνω πρόταση λέει ότι όταν ένα ταίριασμα έχει το ίδιο μέγεθος με ένα κάλυμμα κορυφών, τότε και τα δύο είναι βέλτιστα (δηλ. το ταίριασμα είναι μέγιστο και το κάλυμμα κορυφών ελάχιστο). Όμως υπάρχουν πολλά γραφήματα όπου το ελάχιστο κάλυμμα κορυφών είναι μεγαλύτερο από το μέγιστο ταίριασμα.

13 Αριθμοί Ramsey

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε ζευγάρι ακεραίων n, m, υπάρχει ένας ελάχιστος αριθμός $r(n, m)$ τέτοιος ώστε κάθε γράφημα με τουλάχιστον $r(n, m)$ κορυφές περιέχει είτε το K_n (κλίκα με n κορυφές) είτε το $\overline{K}_m$ (ανεξάρτητο σύνολο με m κορυφές). Οι αριθμοί αυτοί συμβολίζονται με $r(n, m)$ και ονομάζονται αριθμοί Ramsey. Ο αριθμός Ramsey $r(n, m)$ είναι ο ελάχιστος που εξασφαλίζει την παραπάνω ιδιότητα με την έννοια ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα γράφημα με $r(n, m) - 1$ κορυφές που δεν περιέχει είτε το K_n είτε το $\overline{K}_m$. Ο ακριβής υπολογισμός των αριθμών Ramsey για μεγάλες τιμές των n, m αποτελεί ένα εξαιρετικά δύσκολο πρόβλημα για το οποίο δεν γνωρίζουμε μια γενική μέθοδο επίλυσης.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $r(3, 3) = 6$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $r(3, 3) \geq 6$ επειδή ο κύκλος με 5 κορυφές έχει μέγιστη κλίκα και μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 2. Για να δείξουμε την ισότητα, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε γράφημα με 6 κορυφές περιέχει είτε κλίκα είτε ανεξάρτητο σύνολο με 3 κορυφές. Η προσθήκη και άλλων κορυφών δεν μπορεί να επηρεάσει αυτή την ιδιότητα.

Πρόταση 7. *Κάθε γράφημα με 6 κορυφές περιέχει είτε το K_3 είτε το $\overline{K}_3$.*

Απόδειξη. Έστω ότι στο γράφημα υπάρχει κορυφή v με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3, και έστω u_1, u_2, u_3 τρεις γείτονες της v. Αν δύο από τις u_1, u_2, u_3 συνδέονται με ακμή (π.χ. η u_1 με τη u_2), το τρίγωνο v, u_1, u_2 αποτελεί κλίκα με 3 κορυφές. Διαφορετικά, οι u_1, u_2, u_3 αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο με 3 κορυφές.

Αν όλες οι κορυφές του γραφήματος έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2, θεωρούμε το συμπληρωματικό γράφημα. Αυτό περιέχει κορυφή με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3, και επομένως περιέχει είτε το το K_3 είτε το $\overline{K}_3$. Αν το συμπληρωματικό γράφημα περιέχει το K_3 (αντίστοιχα, το $\overline{K}_3$), το αρχικό γράφημα περιέχει το $\overline{K}_3$ (αντίστοιχα, το K_3). □

14 Χρωματικός Αριθμός Γραφημάτων

Ένας έγκυρος *χρωματισμός* ενός γραφήματος ονομάζεται μια ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές ώστε κάθε ζευγάρι κορυφών που συνδέεται με ακμή να έχει διαφορετικό χρώμα. Ο *χρωματικός αριθμός* ενός γραφήματος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για τον οποίο υπάρχει ένας έγκυρος χρωματισμός. Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G συμβολίζεται με $\chi(G)$.

Σε έναν έγκυρο χρωματισμό, οι κορυφές με το ίδιο χρώμα συγκροτούν ένα ανεξάρτητο σύνολο αφού δεν υπάρχει καμία ακμή μεταξύ τους. Κάθε έγκυρος χρωματισμός διαμερίζει τις κορυφές του γραφήματος σε τόσα ανεξάρτητα σύνολα όσα και τα χρώματα που χρησιμοποιεί. Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν σε ανεξάρτητα σύνολα. Έτσι, ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k αν και μόνο αν είναι k-μερές.

Τα διμερή γραφήματα έχουν χρωματικό αριθμό 2. Επομένως, ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 2 αν και μόνο αν δεν έχει κύκλους με περιττό μήκος. Σαν άμεση συνέπεια προκύπτει ότι ο κύκλος με n κορυφές, συμβολίζεται με C_n, έχει

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ 3 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Επίσης είναι $\chi(K_n) = n$, $\chi(K_n - v) = n - 1$ για κάθε κορυφή v, και $\chi(\overline{K_n}) = 1$. Έχουμε ακόμη αποδείξει ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 5. Μάλιστα το διάσημο Θεώρημα των 4 χρωμάτων λέει ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του 4.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό Δ έχει χρωματικό αριθμό το πολύ $\Delta+1$. Η ιδέα είναι ότι τα $\Delta+1$ χρώματα είναι αρκετά για να χρωματίσουμε μια κορυφή και τους γειτόνους της με διαφορετικά χρώματα. Επομένως, ο αλγόριθμος που εξετάζει τις κορυφές μία-προς-μία και χρωματίζει κάθε κορυφή με το μικρότερο διαθέσιμο χρώμα υπολογίζει ένα (έγκυρο) χρωματισμό των κορυφών με $\Delta + 1$ χρώματα το πολύ. Εναλλακτικά, αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με μαθηματική επαγωγή ως εξής:

Το ζητούμενο ισχύει για κάθε γράφημα με $\Delta + 1$ κορυφές. Έστω ότι κάθε γράφημα με $n - 1$ κορυφές και μέγιστο βαθμό Δ μπορεί να χρωματιστεί με $\Delta + 1$ χρώματα (επαγωγική υπόθεση). Αν το γράφημα έχει n κορυφές, αφαιρούμε μια οποιαδήποτε από αυτές. Το γράφημα που απομένει μπορεί να χρωματιστεί με $\Delta+1$ χρώματα λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Η κορυφή που αφαιρέσαμε έχει το πολύ Δ γείτονες που χρησιμοποιούν το πολύ Δ χρώματα. Επομένως, υπάρχει διαθέσιμο χρώμα για να αναθέσουμε στην κορυφή που αφαιρέσαμε χωρίς να προκύψει ακμή με άκρα ίδιου χρώματος.

Κάθε γράφημα που περιέχει μια κλίκα μεγέθους k έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον k (χρειάζονται k διαφορετικά χρώματα για τις κορυφές της κλίκας). Γνωρίζουμε ότι η μεγαλύτερη κλίκα ενός γραφήματος G αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο του συμπληρωματικού γραφήματος $\overline{G}$. Επομένως, για κάθε γράφημα G, έχουμε $\chi(G) \geq \alpha(\overline{G})$.

Πρόταση 8. *Για κάθε γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.*

Απόδειξη. Έστω $\chi(G) = k$. Οι κορυφές του G μπορούν να διαμεριστούν σε k ανεξάρτητα σύνολα $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Αφού το μεγαλύτερο ανεξάρτητο σύνολο στο G έχει $\alpha(G)$ κορυφές, έχουμε $|V_i| \leq \alpha(G)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Επομένως,

$$n = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\,\alpha(G) = \chi(G)\alpha(G) \Rightarrow n/\alpha(G) \leq \chi(G)$$

Για το πάνω φράγμα, οι κορυφές του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου μπορούν να χρωματιστούν με ένα χρώμα. Ο χρωματισμός των υπόλοιπων $n - \alpha(G)$ κορυφών απαιτεί το πολύ $n - \alpha(G)$ διαφορετικά χρώματα. Συνολικά, ο χρωματικός αριθμός του G δεν μπορεί να ξεπερνά το $n - \alpha(G) + 1$. $\square$

Άσκηση 33. Να δώσετε ένα παράδειγμα γραφήματος G με n κορυφές και χρωματικό αριθμό $\chi(G) = n/\alpha(G)$, και ένα παράδειγμα γραφήματος G' με n κορυφές και χρωματικό αριθμό $\chi(G') = n - \alpha(G') + 1$.