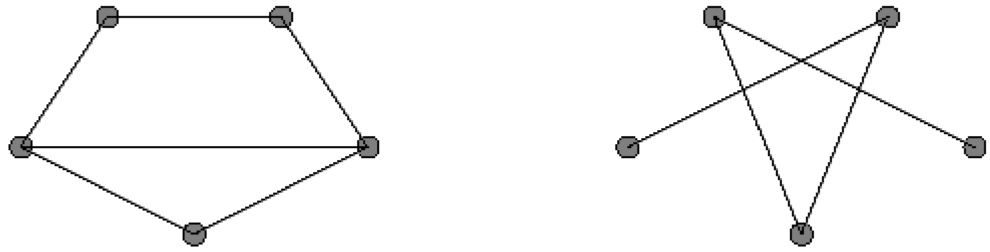
Συμπληρωματικός γράφος

- Συμπληρωματικός γράφος (complement)



Ένας γράφος $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ είναι συμπληρωματικός ενός γράφου G=(V,E) ανν:

- $V = \tilde{V}$
- $(x, y) \in E \leftrightarrow (x, y) \notin \tilde{E}.$

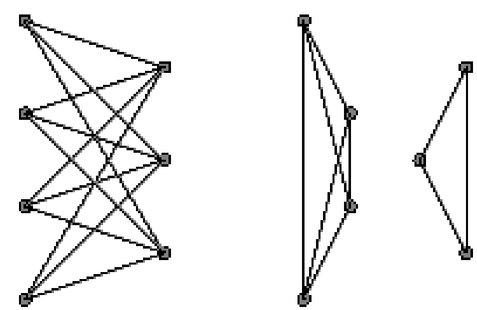
για κάθε ζεύγος διακριτών κορυφών

Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε:

$$N_n = \tilde{K}_n.$$

$$\tilde{K}_{r,s} = K_r \cup K_s.$$



$$C_5 = \tilde{C}_5.$$

Παράσταση γράφου I

- **Πίνακας γειτνίασης** (adjacency matrix)
  - Πίνακας A nxn

$$A(G) = [a_{ij}], \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

- Σε γράφο με βάρη, τα a_{ij} αντικαθήστανται από τα αντίστοιχα βάρη
- Σε μη κατευθυνόμενο γράφο: $a_{ij}=a_{ji}$
- Σε απλό γράφο: $a_{ii}=0$
- Απαιτούμενη μνήμη: $\Theta(n^2)$

Παράσταση γράφου II

- **Πίνακας πρόσπτωσης** (incidence matrix):
  - Πίνακας B nxm όπου:

$$B(G) = [b_{ij}], \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } l_j \text{ προσπίπτει στο } v_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$B(G)B(G)^T = A(G) + \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

όπου d_i είναι ο βαθμός του κόμβου i.

Παράσταση γράφου III

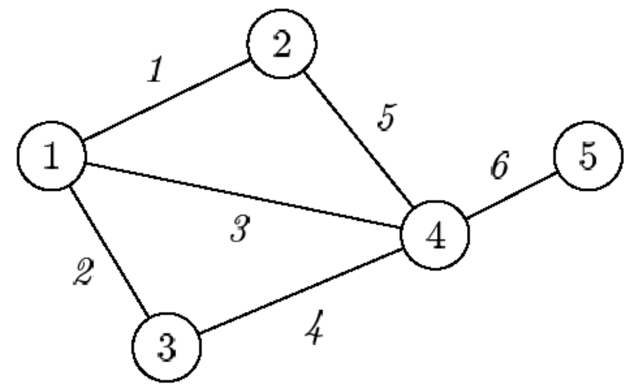
- **Λίστες γειτνίασης** (adjacency lists)
  - Η λίστα γειτνίασης μιας κορυφής v περιέχει όλες τις γειτονικές κορυφές της v.

Παρατηρήσεις:

- Σε γράφο με βάρη βάζουμε ένα επιπλέον πεδίο για το βάρος της πλευράς.
- Σε κατευθυνόμενο γράφο έχουμε 2 λίστες για κάθε v.
- Απαιτούμενη μνήμη: Θ(n+m)

Παράδειγμα

- Γράφος



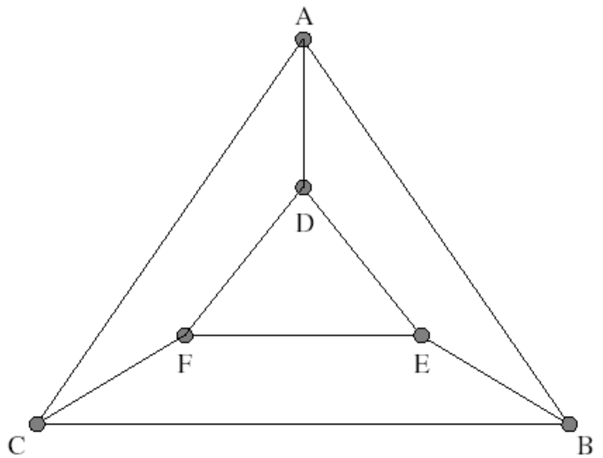
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} [1]\rightarrow & 2 & 3 & 4 \\ [2]\rightarrow & 1 & 4 & \\ [3]\rightarrow & 1 & 4 & \\ [4]\rightarrow & 1 & 2 & 3 & 5 \\ [5]\rightarrow & 4 & & \end{array}$$

Παράδειγμα

- Γράφος



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	1	0	1	0
C	1	1	0	0	0	1
D	1	0	0	0	1	1
E	0	1	0	1	0	1
F	0	0	1	1	1	0

$$
\begin{array}{lcl}
A & \rightarrow & (B, C, D) \\
B & \rightarrow & (A, C, E) \\
C & \rightarrow & (A, B, F) \\
D & \rightarrow & (A, E, F) \\
E & \rightarrow & (B, D, F) \\
F & \rightarrow & (C, D, E)
\end{array}
$$

- Δώστε τον πίνακα πρόσπτωσης!

Πίνακα ή λίστες;

- Οι πίνακες πιο εύκολα υλοποιούνται και συντηρούνται. Προσφέρονται για πυκνούς γράφους.
- Οι λίστες προσφέρονται για αραιούς γράφους και προσφέρονται για αλγορίθμους που η πολυπλοκότητά τους εξαρτάται από το m.

Άσκηση 1η

- Έστω κατευθυνόμενος γράφος G=(V,E)

1. Δίνεται παράσταση του G με πίνακα γειτνίασης A nxn, δώστε αλγόριθμο $\Theta(n^2)$ χρόνου που να υπολογίζει την λίστα πρόσπτωσης του G.
2. Δίνεται παράσταση του G με λίστα γειτνίασης Adj[1..n], δώσε αλγόριθμο $\Theta(n^2)$ χρόνου που να υπολογίζει τον πίνακα γειτνίασης του G.

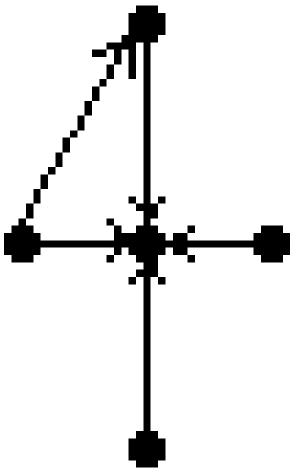
Λύση

1. for i:= 1 to n do

```
begin construct(in_list_v[i],out_list-v[j]);
for i:= 1 to n do
  for j:= 1 to n do
    if a_ij=1 then
    begin
      out_list_v[i]:= out_list_v[i] ∪ {v_j};
      in_list_v[j]:= in_list_v[j] ∪ {v_i}
    end
```

Άσκηση 2η

- **Ολική Καταβόθρα** (total sink) σε κατευθυνόμενο γράφο ονομάζεται μια κορυφή που δεν έχει γείτονες και είναι γείτονας κάθε άλλης κορυφής.
- Ασκήσεις:
  1. Δίνεται παράσταση με πίνακα γειτνίασης. Δώστε αλγόριθμο Θ(n) χρόνου που να βρίσκει μια ολική καταβόθρα (ή αναφέρει πως δεν υπάρχει τέτοια).
  2. Δίνεται παράσταση με λίστες γειτνίασης, δώστε αλγόριθμο χρόνου που να βρίσκει μια ολική καταβόθρα (ή αναφέρει πως δεν υπάρχει τέτοια). Τι πολυπλοκότητας είναι ο αλγόριθμος;



Άσκηση

- Εύρεση maximum spanning tree.