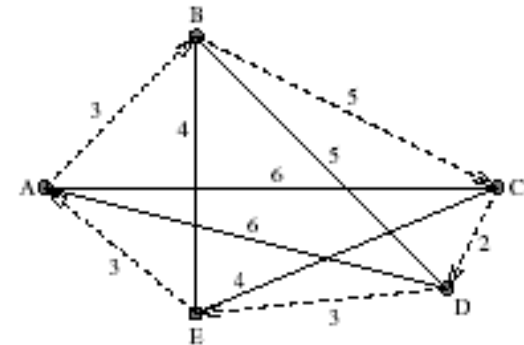
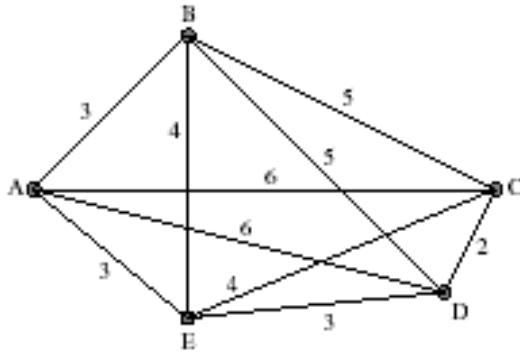


Πρόβλημα πλανόδιου πωλητή

- Ένας πωλητής θέλει να επισκευτεί 5 πόλεις A, B, C, D, E ξεκινώντας και τελειώνοντας στην A, διανύοντας την μικρότερη απόσταση;

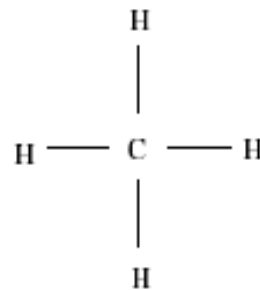


- Πρόβλημα:** Να βρεθεί το συντομότερο μονοπάτι που περνά από όλες τις πόλεις μια φορά ακριβώς, ξεκινώντας και καταλήγοντας στην κορυφή A. (Shortest Hamiltonian cycle)

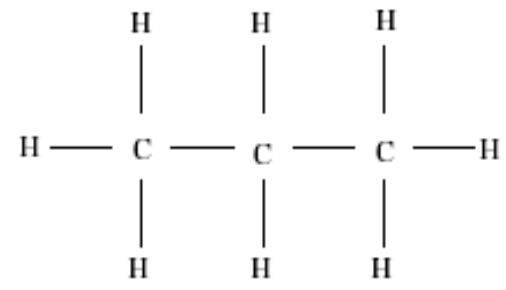
Χημικό Μόριο

- Στο μόριο C_xH_y , x άτομα άνθρακα ενώνονται με y άτομα υδρογόνου. Το υδρογόνο ενώνεται με έναν άνθρακα, ενώ ο άνθρακας ενώνεται με 4 στοιχεία, υδρογόνα ή άνθρακες. Πόσες διαφορετικές δομές υπάρχουν για το μόριο C_4H_{10} ;

- Πόσοι μη ισομορφικοί συνεκτικοί γράφοι υπάρχουν με x κορυφές με βαθμό 4 και y κορυφές με βαθμό 1;



Methane



Propane

Συνήθως ένας γράφος είναι:

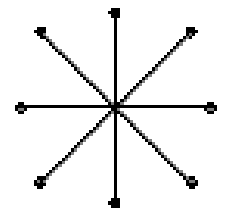
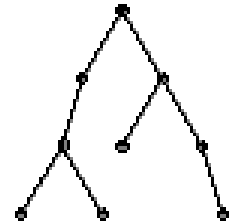
- Απλός
- Μη κατευθυνόμενος
- Συνεκτικός
- Χωρίς βάρη και ετικέτες

Δάσος & Δέντρο

- **Δάσος** καλείται ένας γράφος χωρίς κύκλους
- **Δέντρο** καλείται ένας συνεκτικός γράφος χωρίς κύκλους
- Παρατηρήσεις:
 - Το δέντρο είναι ένα συνεκτικό δάσος
 - Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός δάσους είναι ένα δέντρο
- **Κριτήρια** για να είναι ένας γράφος δέντρο
 - ✓ Συνεκτικός χωρίς κύκλους,
 - ✓ Συνεκτικός με $n-1$ πλευρές
 - ✓ Χωρίς κύκλους με $n-1$ πλευρές
 - ✓ Αφαιρώντας μια οποιαδήποτε πλευρά ο γραφός από συνεκτικός γίνεται μη συνεκτικός
 - ✓ Κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με ακριβώς ένα μονοπάτι,
 - ✓ Δεν έχει κύκλους αλλά η πρόσθεση μιας νέας πλευράς δημιουργεί έναν κύκλο.

Ειδικές μορφές δέντρων

- **Δυαδικό δέντρο:** Δέντρο με ρίζα και κάθε κορυφή έχει το πολύ 2 παιδιά.
- **Αστέρας (Star):** Δέντρο με ρίζα και $n-1$ φύλλα. Ο Βαθμός μιας κορυφής είναι $n-1$ και όλων των άλλων είναι 1.
- **Αλυσίδα (chain)** ή μονοπάτι :
Δέντρο με 2 φύλλα. Ο βαθμός κάθε κόμβου είναι 2 εκτός από αυτόν των φύλλων που είναι 1.

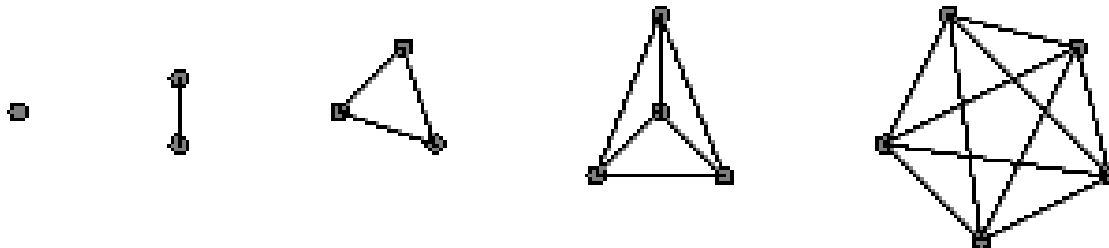


Χωρίς πλευρές & με όλες τις πλευρές

- Γράφοι χωρίς πλευρές

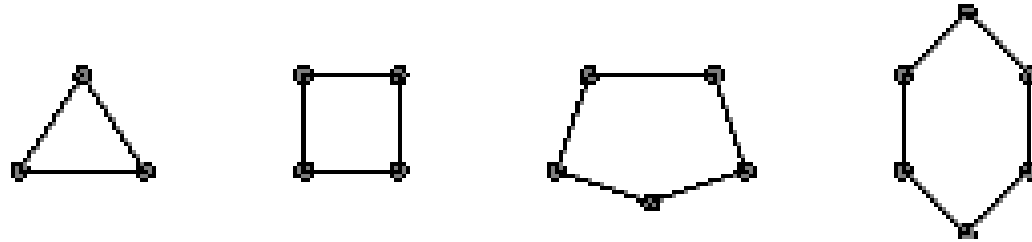
Null graphs N_n : 

- Ένας γράφος θα λέγεται **πλήρης (complete)** αν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με ακμή. Τέτοιοι γράφοι θα συμβολίζονται με K_n
- **Κλίκα (clique)** ενός γράφου λέγεται ένας πλήρης υπογράφος του.

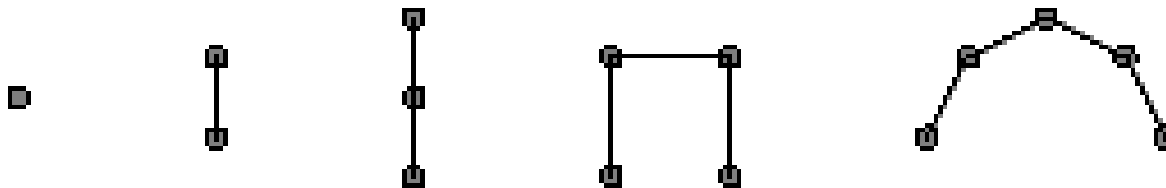


Κύκλοι & Μονοπάτια

- **Κύκλοι (cycles)** C_n : Συνεκτικός γράφος στον οποίο όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2 ($n \geq 3$).



- **Μονοπάτια (paths)** P_n : Κύκλος που του έχει αφαιρεθεί μια πλευρά.

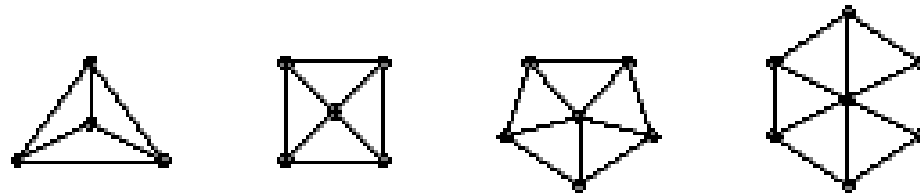


Αστέρια & Τροχοί

- **Αστέρια (stars)** S_n : Μια ρίζα με $n-1$ φύλλα



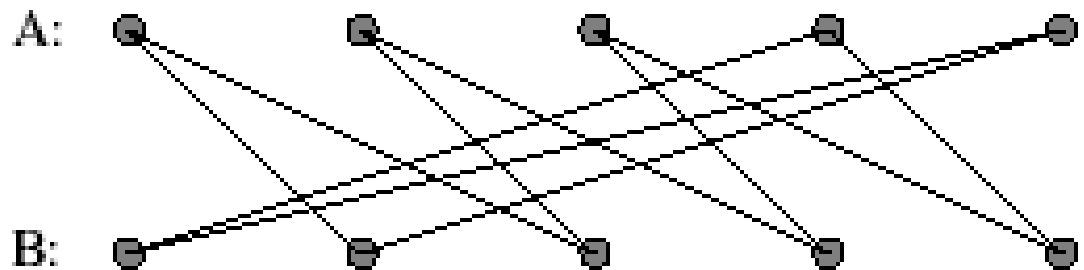
- **Τροχοί (wheels)** W_n : Αστέρι που όλα τα $n-1$ φύλλα σχηματίζουν κύκλο C_{n-1} ($n \geq 4$)



Διμερής Γράφος

- Διμερής γράφος (**bipartite**) καλείται ένας γράφος του οποίου οι κορυφές μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα έ.ώ κάθε στοιχείο του ενός συνδέεται με κάποιο στοιχείο του άλλου, και δύο στοιχεία του ίδιου συνόλου δεν συνδέονται.

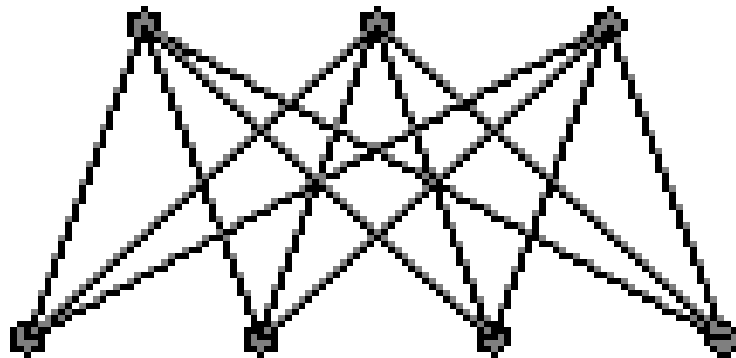
$$V = A \cup B$$



Παρατήρηση: Ένας γράφος είναι διμερής **ανν** κάθε κύκλος έχει άρτιο μήκος.

Πλήρης διμερής γράφος

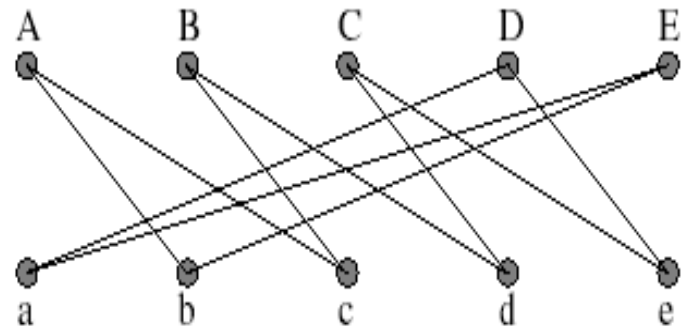
- Πλήρης διμερής γράφος (**complete bipartite graph**) $K_{r,c}$ είναι ένας διμερής γράφος έ.ώ. κάθε στοιχείο του ενός συνόλου της διαμέρισης συνδέεται με κάθε άλλο στοιχείο του δεύτερου συνόλου.



Πρόβλημα γάμου

- Κάτω από ποιες συνθήκες μερικά κορίτσια που αγαπούν μερικά αγόρια μπορούν να παντρευτούν, ώστε κάθε ένα από αυτά να πάρει κάποιον που αγαπά;

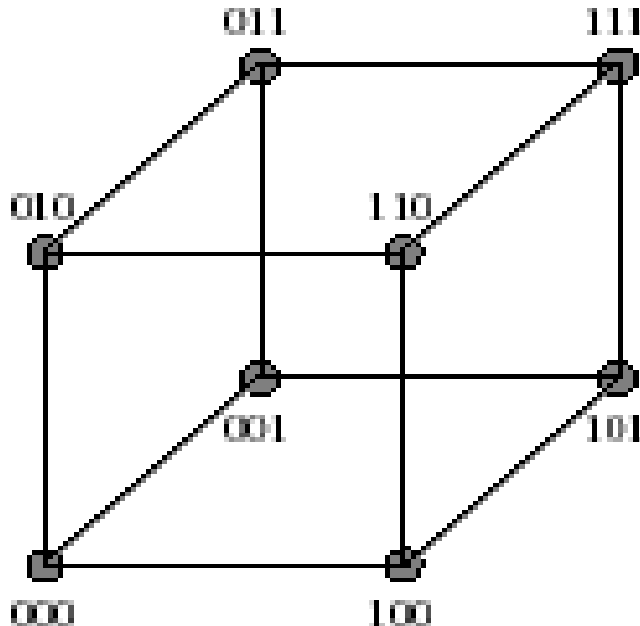
Anna loves: Bob and Charlie
Betsy loves: Charlie and David
Claudia loves: David and Edward
Donna loves: Edward and Albert
Elizabeth loves: Albert and Bob



- Έχει ο διμερής γράφος τέλειο ταίριασμα (**matching**);

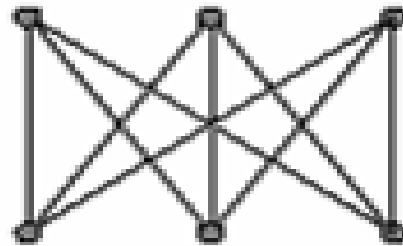
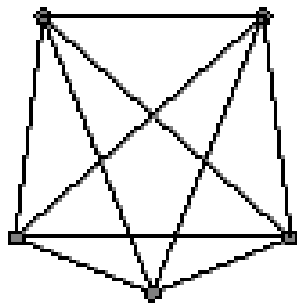
Κύβοι

- Υπάρχουν $n=2^k$ κορυφές που παριστάνουν όλους του δυαδικούς αριθμούς μήκους k .
- Δύο κορυφές συνδέονται με πλευρά αν οι αντίστοιχοι δυαδικοί αριθμοί τους διαφέρουν σε ένα ακριβώς bit.
- Οι κύβοι είναι διμερές;
Γιατί;



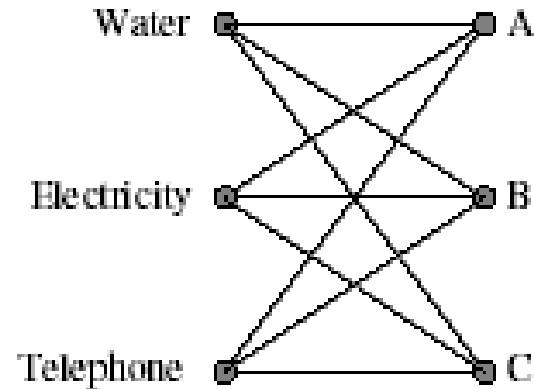
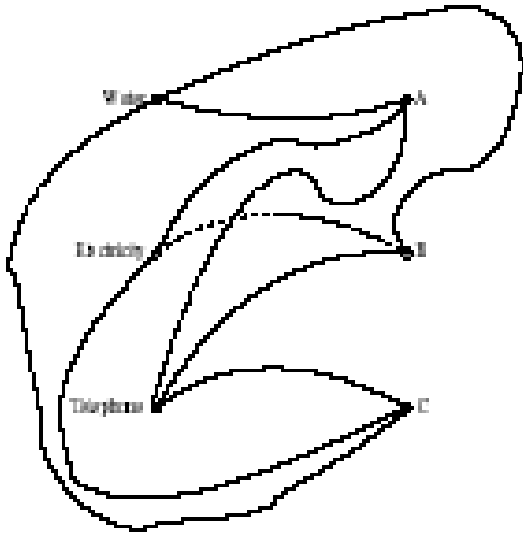
Επίπεδος Γράφος

- **Επίπεδος γράφος (planar)**: γράφος που μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο, ώστε όλες οι πλευρές του να μην διασταυρώνονται
- **Θεώρημα**: Ένας γράφος είναι επίπεδος αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφο ισομορφικό με τον K_5 ή τον $K_{3,3}$.



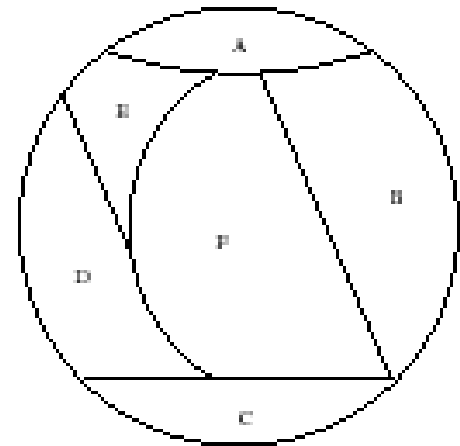
Πρόβλημα των 3 επιχειρήσεων κοινής ωφελείας

- Είναι δυνατόν να συνδέσουμε τα τρία σπίτια A, B, C με τις επιχειρήσεις κοινής ωφελείας ΕΥΔΑΠ, ΔΕΗ, ΟΤΕ ώστε να μην διασταυρώνονται τα καλώδια τους;

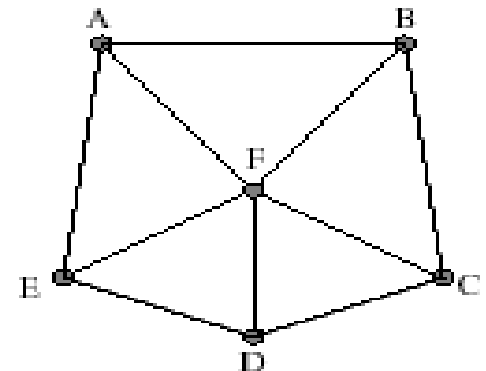


Πρόβλημα χρωματισμού με 4 χρώματα

- Μπορούμε να χρωματίσουμε ένα χάρτη με 4 το πολύ χρώματα έτσι ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικό χρώμα;

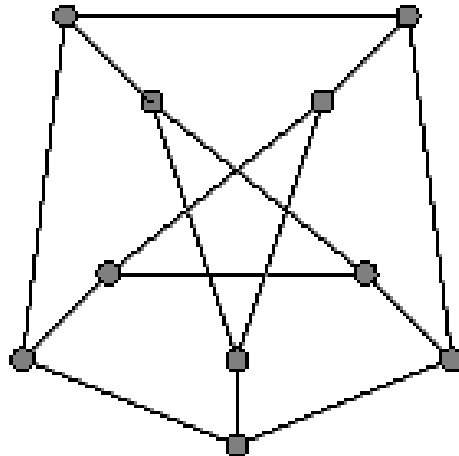


- Χρωματίζονται οι κορυφές ενός γράφου με το πολύ 4 χρώματα;
(χρωματίζεται επίπεδος γράφος με 4 το πολύ χρώματα;)



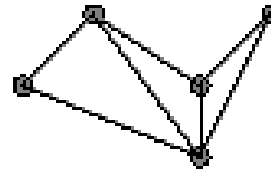
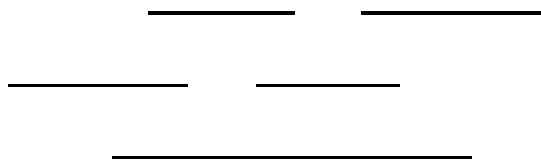
d -κανονικός γράφος

- Σε έναν d -κανονικό γράφο, ο βαθμός κάθε κορυφής είναι ακριβώς d .
- Petersen Graph: 3-κανονικός γράφος



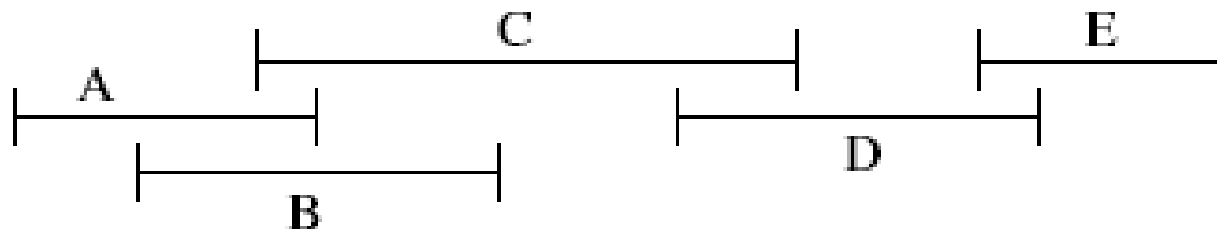
Γράφος διαστημάτων

- Γράφος διαστημάτων (**interval**)
 - Σε κάθε ένα διάστημα αντιστοιχεί μια κορυφή
 - Δύο κόμβοι του γράφου σθνδέονται με ακμή **ανν** τα αντίστοιχα διαστήματα τέμνονται.



The Activity Center Problem

- Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός από δραστηριότητες που μπορούν να εξυπηρετηθούν από ένα server;



- Αντίστοιχο πρόβλημα σε γράφους: να βρεθεί ένα μέγιστο υποσύνολο κορυφών χωρίς να υπάρχει ακμή μεταξύ τους;

(εύρεση μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου- **maximum independent set**)

