

# Γραμμικός Προγραμματισμός

---

**Δημήτρης Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Γραμμικός Προγραμματισμός

---

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
  - **Περιορισμοί:**  $(m \times n)$ -πίνακας  $A$ ,  $m$ -διάνυσμα  $b$ .
  - **Αντικειμενική:**  $n$ -διάνυσμα  $c$ .
  - **Άγνωστοι:**  $n$ -διάνυσμα  $x$ .
  - **Τυπική μορφή (standard form):**

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1 \dots m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots n \end{array}$$

# Γραμμικός Προγραμματισμός

---

- Ελαχιστοποίηση γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης υπό πεπερασμένο αριθμό γραμμικών περιορισμών (ισότητες ή ανισότητες).
  - **Περιορισμοί:**  $(m \times n)$ -πίνακας  $A$ ,  $m$ -διάνυσμα  $b$ .
  - **Αντικειμενική:**  $n$ -διάνυσμα  $c$ .
  - **Άγνωστοι:**  $n$ -διάνυσμα  $x$ .
  - **Τυπική μορφή (standard form):**

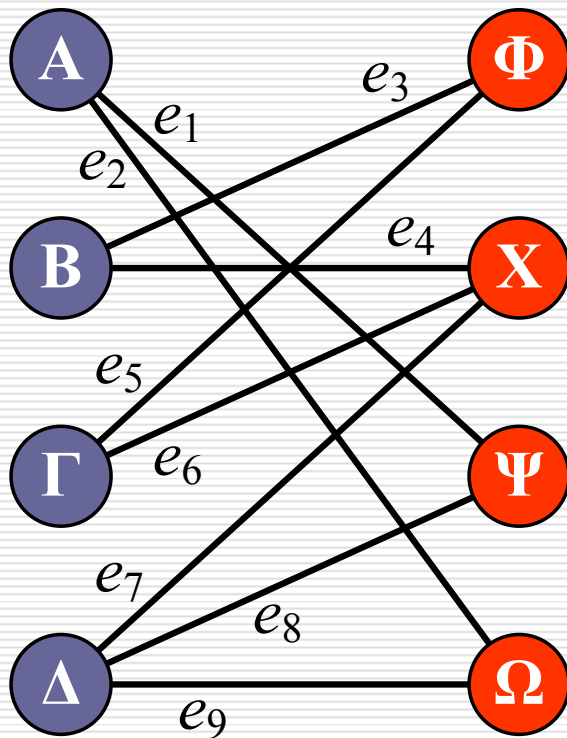
$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{subject to:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

# Πρόβλημα Δίαιτας

	Βιτ.Α	Βιτ.Β	Βιτ. C	Θερμ.
Πίτσα	203	92	100	600
Φρούτα	270	80	512	250
Αυγά	90	84	230	350
Σουβλάκι	500	90	210	500
<b>Απαιτήσεις</b>	<b>2000</b>	<b>300</b>	<b>430</b>	

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 600x_{\pi} + 250x_{\phi} + 350x_{\alpha} + 500x_{\sigma} \\
 \text{s.t.} \quad & 203x_{\pi} + 270x_{\phi} + 90x_{\alpha} + 500x_{\sigma} \geq 2000 \\
 & 92x_{\pi} + 80x_{\phi} + 84x_{\alpha} + 90x_{\sigma} \geq 300 \\
 & 100x_{\pi} + 512x_{\phi} + 230x_{\alpha} + 210x_{\sigma} \geq 430 \\
 & x_{\pi} \geq 0 \quad x_{\phi} \geq 0 \quad x_{\alpha} \geq 0 \quad x_{\sigma} \geq 0
 \end{aligned}$$

# Bipartite Matching



$$\begin{array}{ll}
 \min & -(x_1 + x_2 + \dots + x_9) \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_5 + x_6 \leq 1 \\
 & x_7 + x_8 + x_9 \leq 1 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & x_3 + x_5 \leq 1 \\
 & x_4 + x_6 + x_7 \leq 1 \\
 & x_1 + x_8 \leq 1 \\
 & x_2 + x_9 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad \dots \quad x_9 \geq 0
 \end{array}$$

# Ορολογία

---

- Αν  $x$  ικανοποιεί  $Ax \geq b$  και  $x \geq 0$  είναι **αποδεκτή** (feasible) **λύση**.
  - **Εφικτή περιοχή**:  $P = \{x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- Γραμμικό Πρόγραμμα (ΓΠ, LP) είναι **επιλύσιμο** αν έχει αποδεκτή λύση και **μη-επιλύσιμο** διαφορετικά.
- **Βέλτιστη λύση**  $x^*$  : αποδεκτή λύση με ελάχιστη αντικειμενική τιμή,  $c^T x^* = \min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- ΓΠ **μη-φραγμένο** (κάτω) αν  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\exists$  εφικτή λύση  $x : c^T x \leq \lambda$ .
  - **Επιλύσιμο και φραγμένο** (κάτω) : **πεπερασμένο**.
- Ένα ΓΠ μπορεί να είναι **μη-επιλύσιμο, μη-φραγμένο, ή πεπερασμένο**.

# Ισοδύναμες Μορφές

---

- **Τυπική** μορφή :  $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Κανονική** μορφή :  $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$
- **Μεγιστοπ.**  $\leftrightarrow$  **Ελαχιστοπ.** :  $\max c^T x \Leftrightarrow \min -c^T x$
- **Ισότητα**  $\leftrightarrow$  Ζευγάρι **ανισότητες**

$$a_i^T x = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_i^T x \leq b_i \\ a_i^T x \geq b_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_i^T x \geq -b_i \\ a_i^T x \geq b_i \end{cases}$$

- **Ανισότητα**  $\leftrightarrow$  **Ισότητα** και **slack** μεταβλητή :

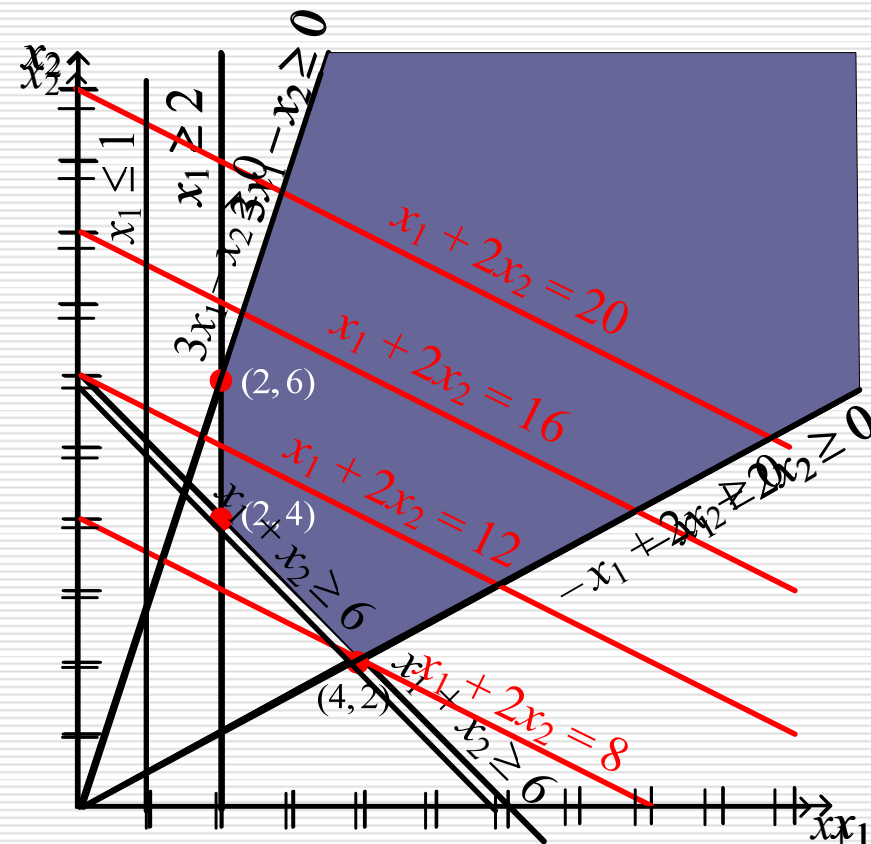
$$a_i^T x \geq b_i \Leftrightarrow a_i^T x - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0$$

- **Αρνητική** μεταβλητή :  $x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0$
- **Όχι πρόσημο** :  $x_j \geq 0 \Leftrightarrow x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0$

# Παράδειγμα

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 & + & 2x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 & & \geq 2 \\ & 3x_1 & - & x_2 \geq 0 \\ & x_1 & + & x_2 \geq 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Εφικτή περιοχή : **πολύεδρο  $P$** .  
Φραγμένο : **πολύτοπο  $P$** .
- Κορυφή : ακραίο σημείο  
(όχι κυρτός συνδυασμός άλλων)  
 $\forall y \neq 0, x + y \notin P \vee x - y \notin P$
- Φραγμένο πολύεδρο (πεπερασμένο):  
Υπάρχει **κορυφή** που αντιστοιχεί σε **βέλτιστη λύση** !





# Κορυφές

---

- Αν  $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$  είναι επιλύσιμο και φραγμένο, υπάρχει **κορυφή – βέλτιστη λύση**.
- Αν  $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ , το  $P$  έχει **τουλάχιστον μία κορυφή**.
- $m \times n$  πίνακας  $A$  (περιορισμοί) :
  - #(ανεξάρτ.) εξισώσεων  $m < \#$  μεταβλητών  $n$ .
  - βαθμό  $m$  ( $m$  γραμμικά ανεξάρτητες στήλες).
- Εφικτή λύση  $x \in P$  είναι **κορυφή** ανν στήλες  $\{j \in [n] : x_j > 0\}$  **γραμμικά ανεξάρτητες**.

# Βασικές Εφικτές Λύσεις

□ **Βασική (εφικτή) λύση** (basic (feasible) solution):

■ **Βάση**:  $m$  γραμμικά ανεξάρτ. στήλες του  $A$ .

■ **Βάση** ορίζει τιμές για **βασικές** μεταβλητές.

■ **Μη-βασικές** μεταβλητές στο  $0$ .

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 0x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 9 \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

□ Βασικές λύσεις:  $[\frac{9}{2}, \frac{5}{4}, 0, 0]$ ,  $[22, 0, 5, 0]$ ,  $[2, 0, 0, 5]$ ,  
 $[0, \frac{11}{7}, -\frac{9}{7}, 0]$ ,  $[0, -1, 0, 9]$ ,  $[0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{11}{2}]$

□ Βασικές εφικτές λύσεις  $\leftrightarrow$  κορυφές

# Βασικές Εφικτές Λύσεις

---

- $x$  κορυφή - ΒΕΛ του  $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$   
**ανν** υπάρχει  $B \subseteq [n], |B| = m$ , (βάση):
  - $x_N = 0, N = [n] \setminus B$  (μη-βασικές μεταβλητές).
  - $A_B$  είναι αντιστρέψιμος.
  - $x_B = A_B^{-1}b \geq 0$  (βασικές μεταβλητές).
- Κάθε ΒΕΛ αποτελεί κορυφή του  $P$ .
- Υπάρχουν κορυφές που αντιστοιχούν σε πολλές διαφορετικές ΒΕΛ.

# Βασικές Εφικτές Λύσεις

---

- Αν  $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ , το  $P$  έχει τουλάχιστον μία Βασική Εφικτή Λύση (ΒΕΛ).
- Για κάθε ΒΕΛ  $x$ , υπάρχει  $c_x$  :  $x$  βέλτιστη λύση του  $\min\{c_x^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Υπάρχουν  $< \binom{n}{m}$  «υποψήφιος» βέλτιστες λύσεις (κορυφές - ΒΕΛ) του  $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **Αλγόριθμος** :
  - Δημιούργησε όλες τις βασικές λύσεις.
  - Επέστρεψε τη βασική εφικτή λύση με μικρότερη αντικειμενική τιμή.

# Αλγόριθμος Simplex

---

- [Dantzig, 1947], καλύτερη πρακτική επιλογή.
- Ξεκίνησε από **κορυφή  $x$**  (βάση  $B$ ).
- Υπάρχει **γειτονική κορυφή  $x'$**  με **μικρότερο κόστος**:
  - Ναι : μετακινήσου στη  $x'$  και συνέχισε.
  - Όχι : βέλτιστη λύση.
- Πως ελέγχουμε αν **ΓΠ επιλύσιμο** και βρίσκουμε **αρχική κορυφή** ;
- Πως καταλαβαίνουμε αν **ΓΠ μη-φραγμένο** ;
- **Pivoting** : γειτονική κορυφή με μικρότερο κόστος.

# Εναλλαγή Στηλών

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{s.t.} \quad & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

□ Αφού  $x_N = 0$ ,  $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$  και

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N) x_N \end{aligned}$$

□ **Ανηγμένο** κόστος :  $\tilde{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N$

- Μη-βασική μετ. με **αρνητικό** ανηγμένο κόστος : μείωση κόστους αν αυξηθεί (**γίνει βασική**).
- Αύξηση καθορίζεται από  $x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N$  (μεταβλητές είναι **μη-αρνητικές**).
- **Μη-αρνητικό** ανηγμένο κόστος : **βέλτιστη λύση**.

# Παράδειγμα

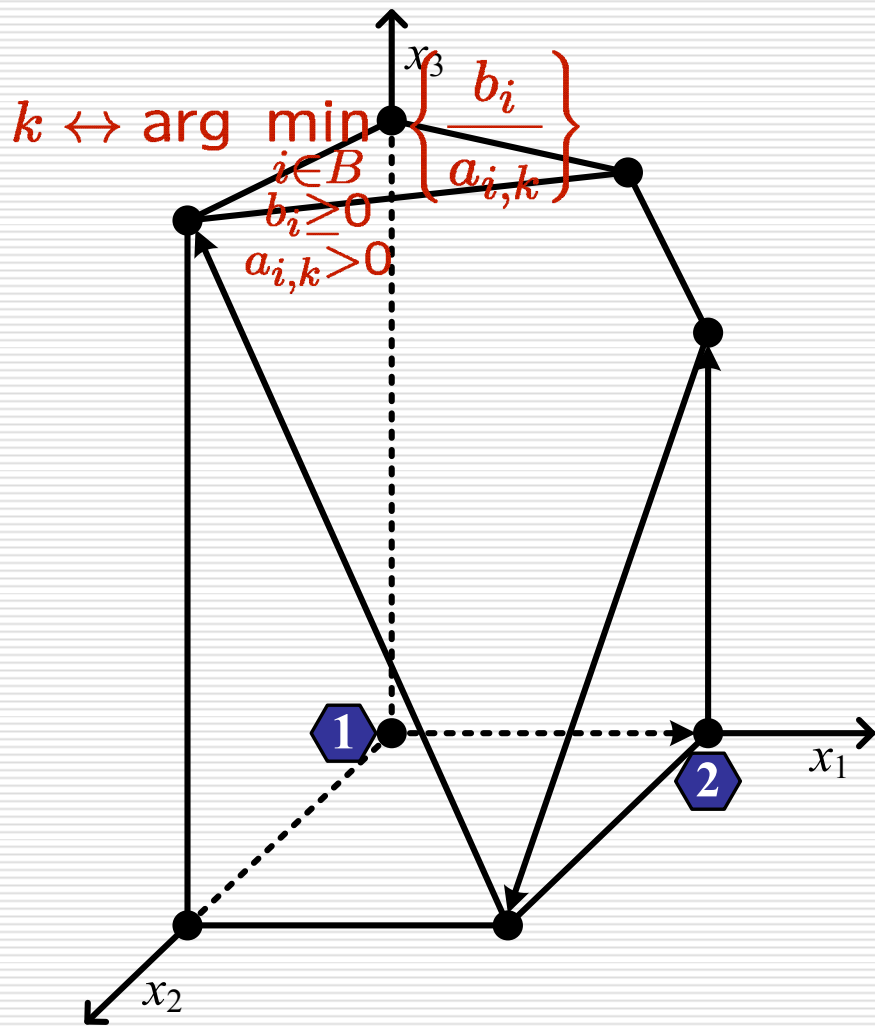
$$k \leftrightarrow \arg \min_{\substack{i \in B \\ b_i \geq 0 \\ a_{i,k} > 0}} \left\{ \frac{b_i}{a_{i,k}} \right\}$$

$$\begin{array}{ll}
 \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
 & x_1 + x_5 = 2 \\
 & x_3 + x_6 = 3 \\
 & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{array}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
0	0	2	0	1	0	0	5
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-34	-1	-14	-6	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
6	0	3	1	0	0	0	1

# Παράδειγμα

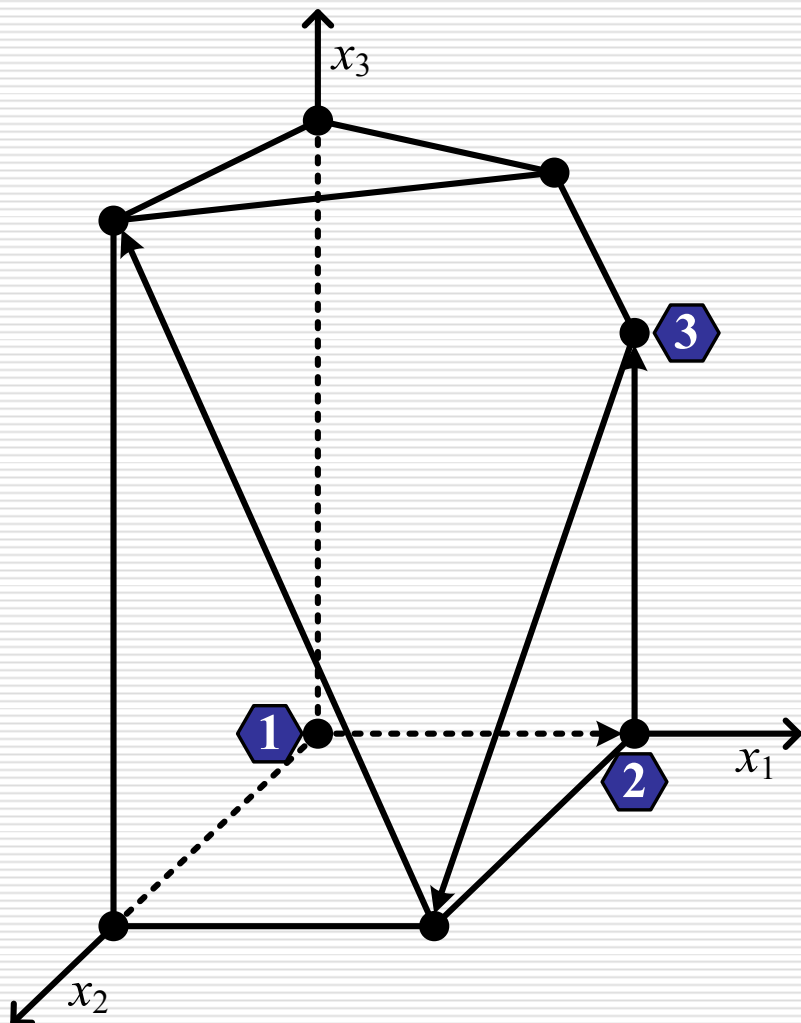


	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>-34</b>	<b>-1</b>	<b>-14</b>	<b>-6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>4</b>	1	1	1	1	0	0	0
<b>2</b>	<b>1</b>	0	0	0	<b>1</b>	0	0
<b>3</b>	0	0	1	0	0	<b>1</b>	0
<b>6</b>	0	3	1	0	0	0	<b>1</b>

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>-32</b>	<b>0</b>	<b>-14</b>	<b>-6</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	0	1	1	1	-1	0	0
<b>2</b>	<b>1</b>	0	0	0	1	0	0
<b>3</b>	0	0	1	0	0	<b>1</b>	0
<b>6</b>	0	3	1	0	0	0	<b>1</b>



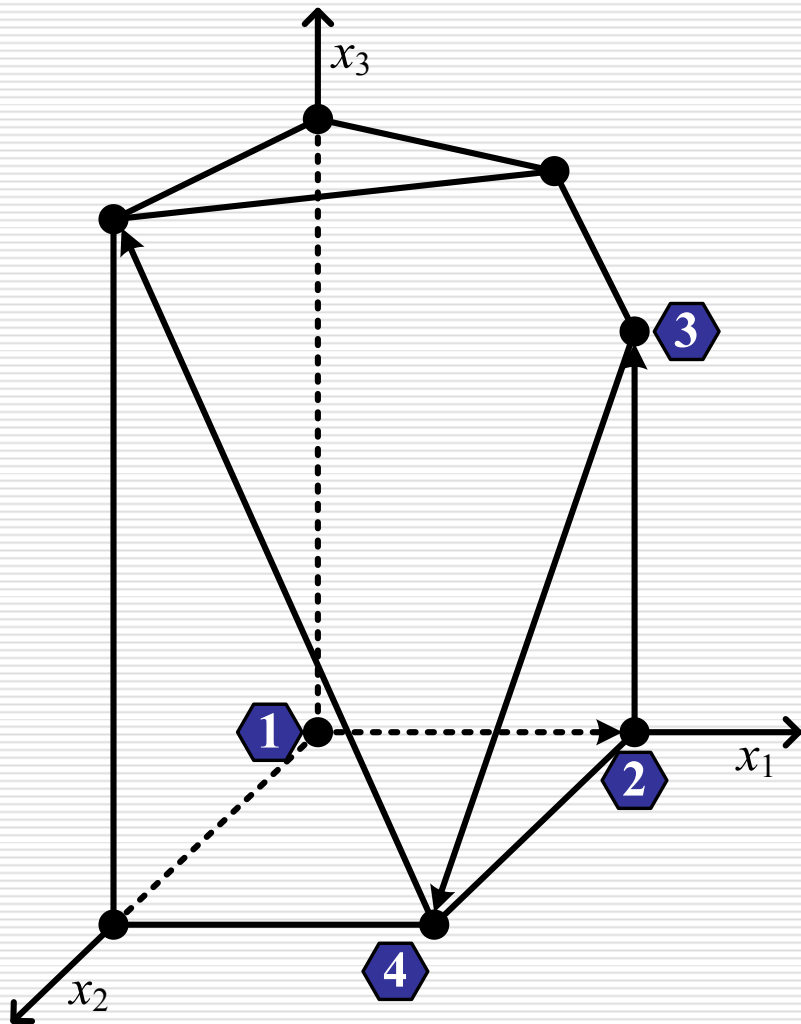
# Παράδειγμα



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>-32</b>	<b>0</b>	<b>-14</b>	<b>-6</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	0	1	<b>1</b>	1	-1	0	0
<b>2</b>	<b>1</b>	0	0	0	1	0	0
<b>3</b>	0	0	1	0	0	<b>1</b>	0
<b>6</b>	0	3	1	0	0	0	<b>1</b>

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>-20</b>	<b>0</b>	<b>-8</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>-5</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>2</b>	0	1	<b>1</b>	1	-1	0	0
<b>2</b>	<b>1</b>	0	0	0	1	0	0
<b>1</b>	0	-1	0	-1	1	<b>1</b>	0
<b>4</b>	0	2	0	-1	1	0	<b>1</b>

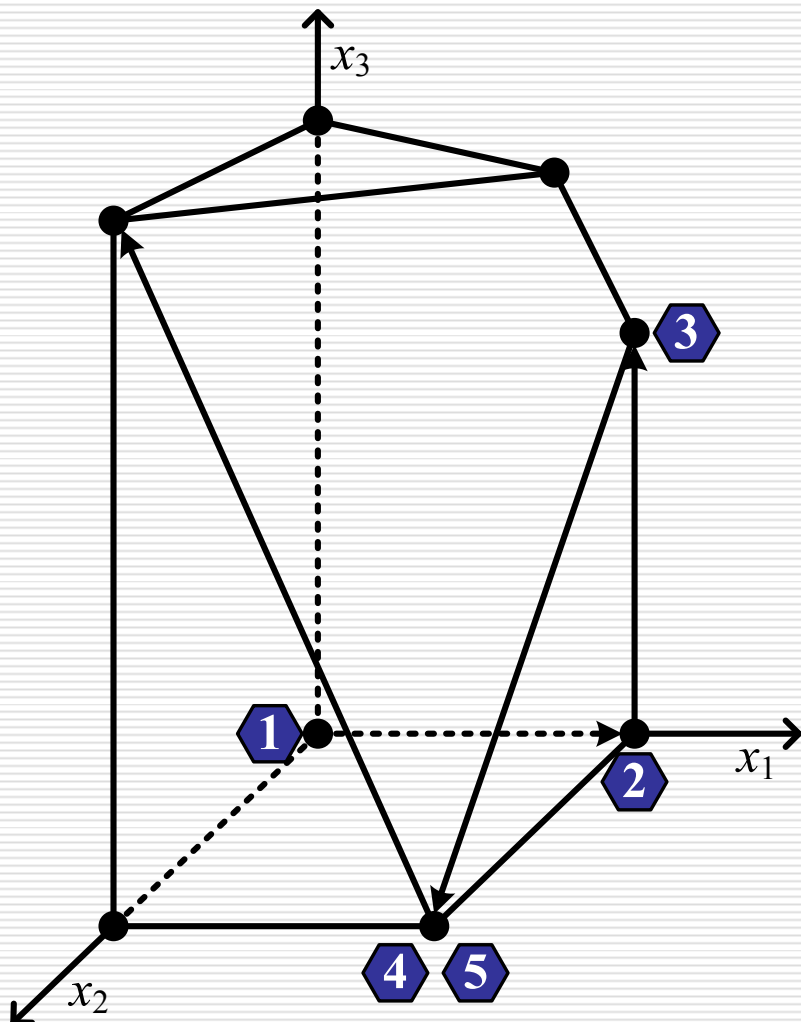
# Παράδειγμα



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-20	0	-8	0	6	-5	0	0
2	0	<b>1</b>	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
1	0	-1	0	-1	1	<b>1</b>	0
4	0	2	0	-1	1	0	<b>1</b>

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	<b>1</b>	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	<b>1</b>	0
0	0	0	-2	-3	3	0	<b>1</b>

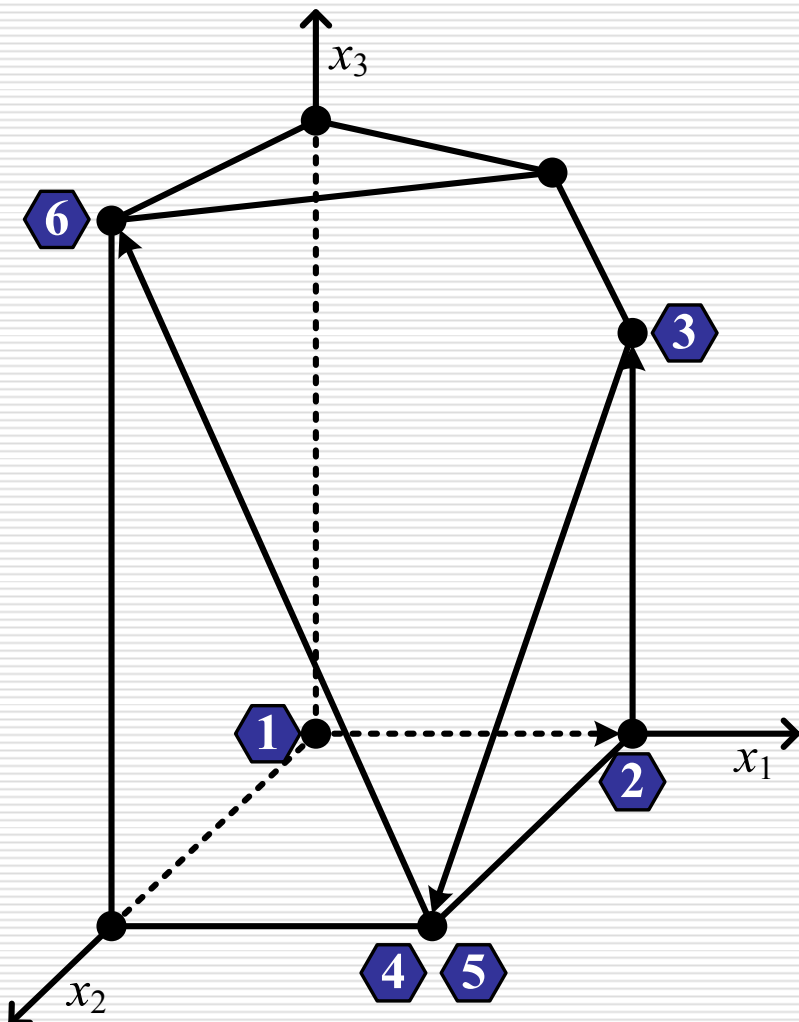
# Παράδειγμα



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-4	0	0	8	14	-13	0	0
2	0	1	1	1	-1	0	0
2	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2	-3	3	0	1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	2/3	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

# Παράδειγμα



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-4	0	0	-2/3	1	0	0	13/3
2	0	1	1/3	0	0	0	1/3
2	1	0	2/3	1	0	0	-1/3
3	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	-2/3	-1	1	0	1/3

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-2	1	0	0	2	0	0	4
1	-1/2	1	0	-1/2	0	0	1/2
3	3/2	0	1	3/2	0	0	-1/2
0	-3/2	0	0	-3/2	0	1	1/2
2	1	0	0	0	1	0	0

# Παράδειγμα

---

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_2 + x_4 + 5x_7 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 + x_5 = 2 \\ & x_3 + x_6 = 3 \\ & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

$$x^* = [0, 1, 3, 0, 2, 0, 0], \quad c^T x^* = 2$$

# Παράδειγμα

---

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
-4	0	0	-2	1	0	0	13/3
2	0	1	-1	0	0	0	1/3
2	1	0	-2	1	0	0	-1/3
3	0	0	-3	0	0	1	0
0	0	0	-1	-1	1	0	1/3

- **Μη-φραγμένο** : Το  $x_3$  μεγαλώνει απεριόριστα (μικραίνοντας κόστος) και λύση εφικτή.

# Χρόνος Εκτέλεσης Simplex

---

- Μετακίνηση σε κορυφές με μικρότερο κόστος : τερματισμός με βέλτιστη λύση (αν υπάρχει).
- Παραμονή σε ίδια κορυφή (ή ίδιο κόστος) : **άενη ανακύκλωση!**
  - Κανόνες εναλλαγής στηλών (π.χ. [Bland 77]) εγγυώνται τερματισμό .
- Πολύ γρήγορος στην πράξη αλλά εκθετικός (#κορυφών) στη χειρότερη περίπτωση.
- **Ανοικτό** αν υπάρχει κανόνας εναλλαγής στηλών που οδηγεί σε **πολυωνυμικό χρόνο** .

# Αλγόριθμοι Πολυωνυμικού Χρόνου

---

- **Ελλειψοειδές [Khachian 79] :**
  - Δυαδική αναζήτηση: Σταδιακός περιορισμός ενός ελλειψοειδούς που εγγυημένα περιέχει λύση.
  - Πρακτικά μη-εφαρμόσιμος (αργός, αριθμητική αστάθεια).
- **Μέθοδοι Εσωτερικού Σημείου [Karmakar 84] :**
  - Κίνηση στο εσωτερικό του πουέδρου (κατάλληλους μετασχηματισμούς).
  - Πρακτικά εφαρμόσιμος, αλλά Simplex!
- **Ταχύτερος αλγόριθμος [Ye 91] .**