

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή ΕΜΦΕ

Αυτόματα και Υπολογιστικά Μοντέλα, ακαδ. έτος 2019-20

Διδάσκοντες: Σ. Ζάχος, Π. Ποτίκας

Εαρινό Εξάμηνο 2019-2020



13η σειρά γραπτών ασκήσεων - Πολυπλοκότητα

Άσκηση 1.

1. Δείξτε ότι $\mathbf{NP} \neq \mathbf{DSPACE}[n]$

Υπόδειξη: Δεν γνωρίζουμε αν κάποια από τις δύο κλάσεις περιέχει την άλλη. Προσπαθήστε να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα κλειστότητας που έχει μόνο μία από τις δύο κλάσεις.

2. Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς τις logspace και Karp αναγωγές. Ισχύει το ίδιο για την κλάση $\mathbf{DTIME}[n^2]$;

Άσκηση 2.

Δείξτε ότι αν η γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ είναι πεπερασμένη, τότε $L \in \mathbf{DTIME}[n]$.

Άσκηση 3.

1. Έστω $L_1, L_2 \in \mathbf{NP}$. Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς την ένωση, δηλ. ότι και $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$. Ισχύει το ίδιο και για την $L_1 \cap L_2$;
2. Ορίζουμε ως το άστρο του Kleene μιας γλώσσας L την γλώσσα:

$$L^* = \{x_1x_2\dots x_k \mid k \geq 0 \ \& \ x_1, x_2, \dots, x_k \in L\}$$

Δείξτε ότι η κλάση \mathbf{NP} είναι κλειστή ως προς το άστρο του Kleene.

Άσκηση 4.

Έστω γλώσσα L και κλάση πολυπλοκότητας \mathcal{C} . Η L ονομάζεται “low” για την \mathcal{C} αν $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι η γλώσσα L δεν προσφέρει επιπλέον υπολογιστική δύναμη στην \mathcal{C} αν την χρησιμοποιήσουμε ως μαντείο (oracle). Επιπλέον, για δύο κλάσεις πολυπλοκότητας \mathcal{C} και \mathcal{C}' λέμε ότι η \mathcal{C}' είναι low για την \mathcal{C} αν για κάθε $L \in \mathcal{C}'$: $\mathcal{C}^L = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι:

1. $\mathbf{P}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.
2. $\mathbf{BPP}^{\mathbf{BPP}} = \mathbf{BPP}$.
3. Η \mathbf{BPP} είναι low για την \mathbf{PP} .

Άσκηση 5.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{PARITY}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i \bmod 2) \in \mathbf{NC}^1$.