Εισαγωγή στα Αξιώματα Μεγάλων Πληθαρίθμων

(Διάλεξη I)

Κωνσταντίνος Τσαπρούνης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Μεταπτυχιακό Μάθημα «Προχωρημένα Θέματα Λογικής»

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο – ΜΠΛΑ/ΑΛΜΑ

4 Απριλίου 2017

Περιεχόμενα

1. Από την αφελή στην αξιωματική συνολοθεωρία
   - Εισαγωγικά
   - Αρχικά αξιώματα της συνολοθεωρίας

Περιεχόμενα

1. Από την αφελή στην αξιωματική συνολοθεωρία
   - Εισαγωγικά
   - Αρχικά αξιώματα της συνολοθεωρίας
2. Το αξίωμα του απείρου και οι φυσικοί αριθμοί
   - Το αξίωμα του απείρου
   - Ιδιότητες του ω
   - Κατασκευή λοιπών αριθμών

Περιεχόμενα

1. Από την αφελή στην αξιωματική συνολοθεωρία
   - Εισαγωγικά
   - Αρχικά αξιώματα της συνολοθεωρίας
2. Το αξίωμα του απείρου και οι φυσικοί αριθμοί
   - Το αξίωμα του απείρου
   - Ιδιότητες του ω
   - Κατασκευή λοιπών αριθμών
3. Πληθάριθμοι, διατακτικοί, επιλογή και θεμελίωση
   - Ισοπληθικότητα και πληθάριθμοι
   - Διατακτικοί αριθμοί και η ιεραρχία των $\aleph$
   - Τα αξιώματα της επιλογής και της θεμελίωσης

Περιεχόμενα

1. Από την αφελή στην αξιωματική συνολοθεωρία
   - Εισαγωγικά
   - Αρχικά αξιώματα της συνολοθεωρίας
2. Το αξίωμα του απείρου και οι φυσικοί αριθμοί
   - Το αξίωμα του απείρου
   - Ιδιότητες του ω
   - Κατασκευή λοιπών αριθμών
3. Πληθάριθμοι, διατακτικοί, επιλογή και θεμελίωση
   - Ισοπληθικότητα και πληθάριθμοι
   - Διατακτικοί αριθμοί και η ιεραρχία των $\aleph$
   - Τα αξιώματα της επιλογής και της θεμελίωσης
4. «Μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι
   - «Απρόσιτοι» πληθάριθμοι
   - «Ασθενώς συμπαγείς» πληθάριθμοι
   - Άλλοι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι

Η σύγχρονη Θεωρία Συνόλων

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές μελέτες του Cantor, στα τέλη του 19ου αιώνα.

Η σύγχρονη Θεωρία Συνόλων

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές μελέτες του Cantor, στα τέλη του 19ου αιώνα.

- Συστηματική μελέτη αφηρημένων συλλογών (*συνόλων*) και των ιδιοτήτων τους.

Η σύγχρονη Θεωρία Συνόλων

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές μελέτες του Cantor, στα τέλη του 19ου αιώνα.

- Συστηματική μελέτη αφηρημένων συλλογών (*συνόλων*) και των ιδιοτήτων τους.
- Ισοπληθικότητα, σύγκριση πληθικότητας άπειρων συνόλων.

Η σύγχρονη Θεωρία Συνόλων

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές μελέτες του Cantor, στα τέλη του 19ου αιώνα.

- Συστηματική μελέτη αφηρημένων συλλογών (*συνόλων*) και των ιδιοτήτων τους.
- Ισοπληθικότητα, σύγκριση πληθικότητας άπειρων συνόλων.
- Υπεραριθμησιμότητα συνόλου πραγματικών αριθμών.

Η σύγχρονη Θεωρία Συνόλων

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές μελέτες του Cantor, στα τέλη του 19ου αιώνα.

- Συστηματική μελέτη αφηρημένων συλλογών (*συνόλων*) και των ιδιοτήτων τους.
- Ισοπληθικότητα, σύγκριση πληθικότητας άπειρων συνόλων.
- Υπεραριθμησιμότητα συνόλου πραγματικών αριθμών.
- Εισαγωγή (υπερπεπερασμένων) διατακτικών αριθμών.

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \ (\textit{ατελής περιγραφή!})$$

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad (\textit{ατελής περιγραφή!})$$

- Θεωρώντας μία «ιδιότητα» Φ και σχηματίζοντας το $\{x : \Phi(x)\}$.

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \ (\textit{ατελής περιγραφή!})$$

- Θεωρώντας μία «ιδιότητα» Φ και σχηματίζοντας το $\{x : \Phi(x)\}$.

$$B = \{x : \text{«ο } x \text{ είναι άρτιος φυσικός αριθμός»}\}$$

Η έννοια του συνόλου

«Ορισμός» του συνόλου κατά τον Cantor

Συνάθροιση, σε μία ολότητα, διακεκριμένων και καθορισμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.

Διαισθητικά:

- Κάθε σύνολο A έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$).
- Ένα σύνολο *καθορίζεται* από τα στοιχεία του.

«Μέθοδοι σχηματισμού» συνόλου:

- Καταγραφή (όλων) των στοιχείων του.

$$A = \{\text{Γη}, \text{Σελήνη}\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \ (\textit{ατελής περιγραφή!})$$

- Θεωρώντας μία «ιδιότητα» Φ και σχηματίζοντας το $\{x : \Phi(x)\}$.

$$B = \{x : \text{«ο } x \text{ είναι άρτιος φυσικός αριθμός»}\}$$

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$$

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$».

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$.

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$. Άτοπο.

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$. Άτοπο.

Παράδοξο του Berry ($\sim$1906)

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$. Άτοπο.

Παράδοξο του Berry ($\sim$1906)

Θεωρούμε τις προτάσεις της Ελληνικής οι οποίες έχουν το πολύ 200 γράμματα και οι οποίες ορίζουν (μονοσήμαντα) κάποιον φυσικό αριθμό.

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$. Άτοπο.

Παράδοξο του Berry ($\sim$1906)

Θεωρούμε τις προτάσεις της Ελληνικής οι οποίες έχουν το πολύ 200 γράμματα και οι οποίες ορίζουν (μονοσήμαντα) κάποιον φυσικό αριθμό. Έστω η πρόταση: «*n είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ο οποίος δεν ορίζεται από καμία τέτοια πρόταση της Ελληνικής*».

Διάσημα παράδοξα

Αλόγιστη και αφελής χρήση αυτών των εννοιών οδηγεί (γρήγορα) σε αντιφάσεις.

Παράδοξο του Russell ($\sim$1901)

Έστω $\Phi(x)$ η ιδιότητα «$x \notin x$». Θέτουμε:

$$V = \{x : \Phi(x)\} = \{x : x \notin x\}.$$

Τότε, $V \in V$ αν και μόνο αν $V \notin V$. Άτοπο.

Παράδοξο του Berry ($\sim$1906)

Θεωρούμε τις προτάσεις της Ελληνικής οι οποίες έχουν το πολύ 200 γράμματα και οι οποίες ορίζουν (μονοσήμαντα) κάποιον φυσικό αριθμό. Έστω η πρόταση: «*n είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ο οποίος δεν ορίζεται από καμία τέτοια πρόταση της Ελληνικής*». Άτοπο.

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, διάφοροι εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με και συνεισέφεραν σε αυτό το εγχείρημα.

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, διάφοροι εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με και συνεισέφεραν σε αυτό το εγχείρημα.

Τελικά, το αξιωματικό σύστημα που προέκυψε (επικράτησε) ονομάζεται Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων με το Αξίωμα της Επιλογής (AC), και συμβολίζεται με ZFC.

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, διάφοροι εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με και συνεισέφεραν σε αυτό το εγχείρημα.

Τελικά, το αξιωματικό σύστημα που προέκυψε (επικράτησε) ονομάζεται Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων με το Αξίωμα της Επιλογής (AC), και συμβολίζεται με ZFC.

- Η ZFC είναι μία θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, διάφοροι εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με και συνεισέφεραν σε αυτό το εγχείρημα.

Τελικά, το αξιωματικό σύστημα που προέκυψε (επικράτησε) ονομάζεται Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων με το Αξίωμα της Επιλογής (AC), και συμβολίζεται με ZFC.

- Η ZFC είναι μία θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.
- Η γλώσσα της ZFC θεωρίας: η σχέση *ισότητας* «$=$» και η σχέση του *ανήκειν* «$\in$».

Αξιωματική θεμελίωση

Η ανάδυση παραδόξων πυροδότησε την «κρίση» των μαθηματικών, στις αρχές του 20ου αιώνα, και έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας.

Στα χρόνια που ακολούθησαν, διάφοροι εξέχοντες μαθηματικοί της εποχής ασχολήθηκαν με και συνεισέφεραν σε αυτό το εγχείρημα.

Τελικά, το αξιωματικό σύστημα που προέκυψε (επικράτησε) ονομάζεται Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων με το Αξίωμα της Επιλογής (AC), και συμβολίζεται με ZFC.

- Η ZFC είναι μία θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.
- Η γλώσσα της ZFC θεωρίας: η σχέση *ισότητας* «$=$» και η σχέση του *ανήκειν* «$\in$».
- Τα αξιώματα της ZFC θεωρίας: «διαισθητικές αλήθειες» για την έννοια του συνόλου, κατασκευαστικοί κανόνες.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.
- Θεμελιώδης τρόπος απόδειξης ισότητας συνόλων:
  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \longrightarrow A = B$.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.
- Θεμελιώδης τρόπος απόδειξης ισότητας συνόλων:
  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \longrightarrow A = B$.

A0. Το Αξίωμα του Κενού (Axiom of Emptyset)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.
- Θεμελιώδης τρόπος απόδειξης ισότητας συνόλων:
  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \longrightarrow A = B$.

A0. Το Αξίωμα του Κενού (Axiom of Emptyset)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

$$(\exists A)(\forall x)(x \notin A)$$

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.
- Θεμελιώδης τρόπος απόδειξης ισότητας συνόλων:
  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \longrightarrow A = B$.

A0. Το Αξίωμα του Κενού (Axiom of Emptyset)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

$$(\exists A)(\forall x)(x \notin A)$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.

Τα αξιώματα της ZFC (I)

A1. Το Αξίωμα της Έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα A, B έχουν (ακριβώς) τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

$$(\forall A, B)\,((\forall x)(x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B)$$

- Η έκταση είναι μία μη τετριμμένη αρχή. Μάς λέει ότι ένα σύνολο καθορίζεται πλήρως και οριστικά από τα στοιχεία του.
- Το αντίστροφό της ισχύει προφανώς.
- Θεμελιώδης τρόπος απόδειξης ισότητας συνόλων:
  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \longrightarrow A = B$.

A0. Το Αξίωμα του Κενού (Axiom of Emptyset)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

$$(\exists A)(\forall x)(x \notin A)$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό. Σύμβολο: $\varnothing$

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

A3. Το Αξίωμα της (Γενικευμένης) Ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A.

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

A3. Το Αξίωμα της (Γενικευμένης) Ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge x \in w))$$

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

A3. Το Αξίωμα της (Γενικευμένης) Ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge x \in w))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

A3. Το Αξίωμα της (Γενικευμένης) Ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge x \in w))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό. Σύμβολο: $\bigcup A$

Τα αξιώματα της ZFC (II)

A2. Το Αξίωμα του Ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα A, B, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι (ακριβώς) τα A και B.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x = A \vee x = B))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό.
- Το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος. Γράφουμε: $\{A, B\}$
- Διατεταγμένο ζεύγος (Kuratowski): $\langle A, B\rangle = \{\{A\}, \{A, B\}\}$.

A3. Το Αξίωμα της (Γενικευμένης) Ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge x \in w))$$

- Από έκταση, αυτό το σύνολο είναι μοναδικό. Σύμβολο: $\bigcup A$
- Ειδική περίπτωση: $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell. Δεδομένου A, αν ορίσουμε το σύνολο:

$$V_A = \{x \in A : x \notin x\},$$

τότε έχουμε ότι $V_A \notin A$ (και άρα $V_A \notin V_A$).

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell. Δεδομένου A, αν ορίσουμε το σύνολο:

$$V_A = \{x \in A : x \notin x\},$$

τότε έχουμε ότι $V_A \notin A$ (και άρα $V_A \notin V_A$). Κανένα παράδοξο.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell. Δεδομένου A, αν ορίσουμε το σύνολο:

$$V_A = \{x \in A : x \notin x\},$$

τότε έχουμε ότι $V_A \notin A$ (και άρα $V_A \notin V_A$). Κανένα παράδοξο. Με άλλα λόγια, έπεται πως το σύμπαν δεν είναι σύνολο.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell. Δεδομένου A, αν ορίσουμε το σύνολο:

  $$V_A = \{x \in A : x \notin x\},$$

  τότε έχουμε ότι $V_A \notin A$ (και άρα $V_A \notin V_A$). Κανένα παράδοξο.
  Με άλλα λόγια, έπεται πως το σύμπαν δεν είναι σύνολο.
- Το A4 λέγεται «αξιωματικό σχήμα» γιατί είναι, στην πραγματικότητα, μία (αριθμήσιμα) άπειρη λίστα αξιωμάτων.

Τα αξιώματα της ZFC (III)

A4. Το Αξιωματικό σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x)$ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δεδομένου $\Phi(x)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
- Η αναφορά σε (ήδη) υπάρχον σύνολο A αποτρέπει την ανάδυση του παραδόξου του Russell. Δεδομένου A, αν ορίσουμε το σύνολο:

  $$V_A = \{x \in A : x \notin x\},$$

  τότε έχουμε ότι $V_A \notin A$ (και άρα $V_A \notin V_A$). Κανένα παράδοξο. Με άλλα λόγια, έπεται πως το σύμπαν δεν είναι σύνολο.
- Το A4 λέγεται «αξιωματικό σχήμα» γιατί είναι, στην πραγματικότητα, μία (αριθμήσιμα) άπειρη λίστα αξιωμάτων. Για κάθε δεδομένο τύπο $\Phi(x)$, έχουμε και το αντίστοιχο αξίωμα διαχωρισμού για τον $\Phi(x)$.

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση.

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Δεδομένων των A0-A5, μπορούμε ήδη να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία πολλά (γνωστά) μαθηματικά εργαλεία. Μερικά παραδείγματα:

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Δεδομένων των A0-A5, μπορούμε ήδη να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία πολλά (γνωστά) μαθηματικά εργαλεία. Μερικά παραδείγματα:

- Σχέσεις (διάταξης, ισοδυναμίας, κ.λ.π.) καθώς και συναρτήσεις

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Δεδομένων των A0-A5, μπορούμε ήδη να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία πολλά (γνωστά) μαθηματικά εργαλεία. Μερικά παραδείγματα:

- Σχέσεις (διάταξης, ισοδυναμίας, κ.λ.π.) καθώς και συναρτήσεις
- Σύνολα συναρτήσεων: ${}^{A}B = \{f : \text{«η } f \text{ είναι συνάρτηση»} \wedge f : A \longrightarrow B\}$

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Δεδομένων των A0-A5, μπορούμε ήδη να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία πολλά (γνωστά) μαθηματικά εργαλεία. Μερικά παραδείγματα:

- Σχέσεις (διάταξης, ισοδυναμίας, κ.λ.π.) καθώς και συναρτήσεις
- Σύνολα συναρτήσεων: ${}^{A}B = \{f : \text{«η } f \text{ είναι συνάρτηση»} \wedge f : A \longrightarrow B\}$
- Οικογένειες συνόλων και γενικευμένα καρτεσιανά γινόμενα:

Τα αξιώματα της ZFC (IV)

A5. Το Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow x \subseteq A)$$

ή, χωρίς συντομογραφίες:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \longleftrightarrow (\forall y)(y \in x \longrightarrow y \in A))$$

- Μοναδικότητα από έκταση. Γράφουμε: $\mathcal{P}(A)$.

Δεδομένων των A0-A5, μπορούμε ήδη να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία πολλά (γνωστά) μαθηματικά εργαλεία. Μερικά παραδείγματα:

- Σχέσεις (διάταξης, ισοδυναμίας, κ.λ.π.) καθώς και συναρτήσεις
- Σύνολα συναρτήσεων: ${}^{A}B = \{f : \text{«η } f \text{ είναι συνάρτηση»} \wedge f : A \longrightarrow B\}$
- Οικογένειες συνόλων και γενικευμένα καρτεσιανά γινόμενα: δεδομένης οικογένειας $(A_i)_{i \in I}$, με $I \neq \varnothing$:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : \text{«η } f \text{ είναι συνάρτηση»} \wedge \mathrm{dom}(f) = I \wedge (\forall i \in I)(f(i) \in A_i)\}$$

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία).

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Δηλαδή, για παράδειγμα: $0 = \varnothing$

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Δηλαδή, για παράδειγμα: $0 = \varnothing$, $1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Δηλαδή, για παράδειγμα: $0 = \varnothing$, $1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = 1^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Δηλαδή, για παράδειγμα: $0 = \varnothing$, $1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = 1^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$, κ.ο.κ., για κάθε έναν *συγκεκριμένο* φυσικό αριθμό.

Φυσικοί αριθμοί

Απεικονίζουμε τους φυσικούς αριθμούς στη συνολοθεωρία με την εξής ιδέα:

Έστω ότι το σύνολο A_2 αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «2» (με τρόπο ώστε το A_2 να έχει όντως δύο στοιχεία). Χρησιμοποιούμε το ίδιο το σύνολο A_2 ως νέο στοιχείο για να φτιάξουμε το σύνολο A_3 που αναπαριστά (συνολοθεωρητικά) τον αριθμό «3», δηλ., θέτουμε $A_3 = A_2 \cup \{A_2\}$.

Προφανώς, ξεκινάμε από το: $0 = \varnothing$.

Έτσι, κάθε φυσικός αριθμός *ορίζεται* ώστε να είναι ίσος με το σύνολο όλων των προηγούμενων, δηλ., $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Το **επόμενο σύνολο του** A (συμβολικά: A^+) ορίζεται ως:

$$A^+ = A \cup \{A\}$$

Δηλαδή, για παράδειγμα: $0 = \varnothing$, $1 = 0^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = 1^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$, κ.ο.κ., για κάθε έναν *συγκεκριμένο* φυσικό αριθμό.

- Τί γίνεται όμως με το **σύνολο όλων των φυσικών αριθμών**;

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη.

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^{+} \in A)$$

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^{+} \in A)$$

A6. Το Αξίωμα του Απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A)$$

A6. Το Αξίωμα του Απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

$$(\exists A)(\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A))$$

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^{+} \in A)$$

A6. Το Αξίωμα του Απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

$$(\exists A)(\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^{+} \in A))$$

Δεδομένης της ύπαρξης τουλάχιστον ενός επαγωγικού συνόλου (από το A6), μπορούμε να θεωρήσουμε το *ελάχιστο επαγωγικό σύνολο*, δηλ., την τομή όλων των επαγωγικών συνόλων.

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A)$$

A6. Το Αξίωμα του Απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

$$(\exists A)(\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A))$$

Δεδομένης της ύπαρξης τουλάχιστον ενός επαγωγικού συνόλου (από το A6), μπορούμε να θεωρήσουμε το *ελάχιστο επαγωγικό σύνολο*, δηλ., την τομή όλων των επαγωγικών συνόλων. Από έκταση, αυτό θα είναι μοναδικό.

Το αξίωμα του απείρου

Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Για την ακρίβεια, πρέπει να την υποθέσουμε αξιωματικά.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν ισχύει:

$$\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A)$$

A6. Το Αξίωμα του Απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

$$(\exists A)(\varnothing \in A \wedge (\forall x)(x \in A \longrightarrow x^+ \in A))$$

Δεδομένης της ύπαρξης τουλάχιστον ενός επαγωγικού συνόλου (από το A6), μπορούμε να θεωρήσουμε το *ελάχιστο επαγωγικό σύνολο*, δηλ., την τομή όλων των επαγωγικών συνόλων. Από έκταση, αυτό θα είναι μοναδικό.

Ορισμός

Ορίζουμε **το σύνολο των φυσικών αριθμών**, το οποίο συμβολίζουμε με ω, ως το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

P3. Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

P3. Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

P4. Αν n, m φυσικοί αριθμοί με $s(n) = s(m)$, τότε $n = m$.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

P3. Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

P4. Αν n, m φυσικοί αριθμοί με $s(n) = s(m)$, τότε $n = m$.

P5. Αν A είναι ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τέτοιο ώστε $0 \in A$ και $(\forall\, n)(n \in A \longrightarrow s(n) \in A)$, τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί ανήκουν στο A.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

P3. Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

P4. Αν n, m φυσικοί αριθμοί με $s(n) = s(m)$, τότε $n = m$.

P5. Αν A είναι ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τέτοιο ώστε $0 \in A$ και $(\forall\, n)(n \in A \longrightarrow s(n) \in A)$, τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί ανήκουν στο A.

Θεώρημα

Το σύνολο ω, με $0 = \varnothing$ και $s(n) = n^+$, ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano.

Ιδιότητες του συνόλου ω

Το σύνολο ω των (συνολοθεωρητικών) φυσικών αριθμών είναι λειτουργικό.

Τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς

P1. Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

P2. Κάθε φυσικός αριθμός n έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό, τον $s(n)$.

P3. Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

P4. Αν n, m φυσικοί αριθμοί με $s(n) = s(m)$, τότε $n = m$.

P5. Αν A είναι ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών τέτοιο ώστε $0 \in A$ και $(\forall\, n)(n \in A \longrightarrow s(n) \in A)$, τότε όλοι οι φυσικοί αριθμοί ανήκουν στο A.

Θεώρημα

Το σύνολο ω, με $0 = \varnothing$ και $s(n) = n^+$, ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano.

Επίσης, ορίζονται φυσιολογικά οι πράξεις «$+$» της πρόσθεσης και «$\cdot$» του πολλ/μου, καθώς και η σχέση «$\leqslant$» της διάταξης, και αποδεικνύονται βασικά αποτελέσματα όπως το Θεώρημα Αναδρομής και η Αρχή του Περιστερώνα.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

$\mathbb{Q}$: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Q}}$, όπου:

$$\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c, d \rangle \longleftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c\,.$$

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

$\mathbb{Q}$: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Q}}$, όπου:

$$\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c, d \rangle \longleftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim_{\mathbb{Q}}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

$\mathbb{Q}$: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Q}}$, όπου:

$$\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c, d \rangle \longleftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim_{\mathbb{Q}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Q}$ ορίζονται επίσης με φυσιολογικό τρόπο.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

$\mathbb{Q}$: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Q}}$, όπου:

$$\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c, d \rangle \longleftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim_{\mathbb{Q}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Q}$ ορίζονται επίσης με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για την πρόσθεση $+_{\mathbb{Q}}$:

$$[\langle a, b \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}} +_{\mathbb{Q}} [\langle c, d \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}} = [\langle a \cdot_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c, b \cdot_{\mathbb{Z}} d \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$$

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (I)

Δεδομένης της δομής $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leqslant \rangle$, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε, δηλαδή, να απεικονίσουμε συνολοθεωρητικά με τρόπο λειτουργικό, και τα υπόλοιπα δημοφιλή σύνολα αριθμών.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών

$\mathbb{Z}$: Στο σύνολο $\omega \times \omega$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Z}}$, όπου:

$$\langle m, n \rangle \sim_{\mathbb{Z}} \langle k, l \rangle \longleftrightarrow m + l = n + k\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Z} = \omega \times \omega / \sim_{\mathbb{Z}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Z}$ ορίζονται με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για τη διάταξη $\leqslant_{\mathbb{Z}}$:

$$[\langle m, n \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leqslant_{\mathbb{Z}} [\langle k, l \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \longleftrightarrow m + l \leqslant n + k$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ και $1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1, 0 \rangle]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

$\mathbb{Q}$: Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\mathbb{Q}}$, όπου:

$$\langle a, b \rangle \sim_{\mathbb{Q}} \langle c, d \rangle \longleftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c\,.$$

Κατόπιν, θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0_{\mathbb{Z}}\}) / \sim_{\mathbb{Q}}$. Οι πράξεις και η διάταξη στο $\mathbb{Q}$ ορίζονται επίσης με φυσιολογικό τρόπο. Π.χ., για την πρόσθεση $+_{\mathbb{Q}}$:

$$[\langle a, b \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}} +_{\mathbb{Q}} [\langle c, d \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}} = [\langle a \cdot_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c, b \cdot_{\mathbb{Z}} d \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{Q}} = [\langle 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}} \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$ και $1_{\mathbb{Q}} = [\langle 1_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}} \rangle]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$. Οι πράξεις ορίζονται με κάπως πολύπλοκο (και σίγουρα βαρετό) τρόπο.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$. Οι πράξεις ορίζονται με κάπως πολύπλοκο (και σίγουρα βαρετό) τρόπο. Η διάταξη $\leqslant_{\mathbb{R}}$ ορίζεται άμεσα:

$$A \leqslant_{\mathbb{R}} B \longleftrightarrow A \subseteq B$$

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$. Οι πράξεις ορίζονται με κάπως πολύπλοκο (και σίγουρα βαρετό) τρόπο. Η διάταξη $\leqslant_{\mathbb{R}}$ ορίζεται άμεσα:

$$A \leqslant_{\mathbb{R}} B \longleftrightarrow A \subseteq B$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$ και $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}\}$.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$. Οι πράξεις ορίζονται με κάπως πολύπλοκο (και σίγουρα βαρετό) τρόπο. Η διάταξη $\leqslant_{\mathbb{R}}$ ορίζεται άμεσα:

$$A \leqslant_{\mathbb{R}} B \longleftrightarrow A \subseteq B$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$ και $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}\}$.

Αποδεικνύεται ότι το $\langle \mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, \leqslant_{\mathbb{R}} \rangle$ είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα και μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν *το σύνολο των πραγματικών αριθμών*.

Δύο λόγια και για τους υπόλοιπους αριθμούς (II)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

Δεδομένης της δομής $\langle \mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle$, κατασκευάζουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ με τρόπο ώστε να είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα. Αυτό γίνεται θεωρώντας είτε ακολουθίες Cauchy ή τομές Dedekind (ισοδύναμες κατασκευές).

Ένα $A \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται *τομή Dedekind* αν ισχύουν:

1. $A \neq \varnothing$ και $A \neq \mathbb{Q}$.
2. Αν $x \in A$ και $y <_{\mathbb{Q}} x$, τότε $y \in A$.
3. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x <_{\mathbb{Q}} y$.

Θέτουμε: $\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} : \text{«το } A \text{ είναι τομή Dedekind»}\}$. Οι πράξεις ορίζονται με κάπως πολύπλοκο (και σίγουρα βαρετό) τρόπο. Η διάταξη $\leqslant_{\mathbb{R}}$ ορίζεται άμεσα:

$$A \leqslant_{\mathbb{R}} B \longleftrightarrow A \subseteq B$$

Παρατηρήστε ότι $0_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$ και $1_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}\}$.

Αποδεικνύεται ότι το $\langle \mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, \leqslant_{\mathbb{R}} \rangle$ είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα και μπορούμε να το θεωρήσουμε σαν *το σύνολο των πραγματικών αριθμών*.

Μπορούμε να κάνουμε μαθηματικά!

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\{2n : n \in \omega\}$ είναι αριθμήσιμο.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\{2n : n \in \omega\}$ είναι αριθμήσιμο.

  Η αντιστοιχία $f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \{2n : n \in \omega\}$ είναι η $f(n) = 2n$.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.

  Η αντιστοιχία $f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} \mathbb{Z}$ είναι η:

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n+1}{2} & \text{, αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{n}{2} & \text{, αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & \rightarrow & (0,1) & & (0,2) & \rightarrow & (0,3) \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,0) & & (1,1) & & (1,2) & & \ddots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(2,0) & & (2,1) & & \ddots & & \\
 & \swarrow & & & & & \\
(3,0) & & \ddots & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\{2n : n \in \omega\}$ είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο.

Ισοπληθικότητα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ισοπληθικά** αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση (αντιστοιχία) της μορφής $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$. Γράφουμε: $A \sim B$.

Ένα σύνολο X λέγεται **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $X \sim n$. Αλλιώς, το X λέγεται **άπειρο**. Ένα άπειρο σύνολο X λέγεται **αριθμήσιμο** αν $X \sim \omega$. Αλλιώς, το (άπειρο) X λέγεται **υπεραριθμήσιμο**.

Παραδείγματα:

- Το σύνολο $\{2n : n \in \omega\}$ είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.
- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο.

Θεώρημα (Cantor, 1874)

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.
- Αν το A είναι *αριθμήσιμο*, δηλαδή αν $A \sim \omega$, τότε θέτουμε: $|A| = \aleph_0$.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.
- Αν το A είναι *αριθμήσιμο*, δηλαδή αν $A \sim \omega$, τότε θέτουμε: $|A| = \aleph_0$.
- Αν το A είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, τότε θέτουμε: $|A| = \mathfrak{c}$.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.
- Αν το A είναι *αριθμήσιμο*, δηλαδή αν $A \sim \omega$, τότε θέτουμε: $|A| = \aleph_0$.
- Αν το A είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, τότε θέτουμε: $|A| = \mathfrak{c}$.

Παρατήρηση

Για κάθε σύνολο A, έχουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0, 1\}$.

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.
- Αν το A είναι *αριθμήσιμο*, δηλαδή αν $A \sim \omega$, τότε θέτουμε: $|A| = \aleph_0$.
- Αν το A είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, τότε θέτουμε: $|A| = \mathfrak{c}$.

Παρατήρηση

Για κάθε σύνολο A, έχουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0,1\}$. Επομένως, θέτουμε:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Η έννοια του πληθαρίθμου

Θα θέλαμε να αντιστοιχίσουμε, σε κάθε σύνολο A, έναν *πληθικό αριθμό* ή, αλλιώς, *πληθάριθμο* $|A|$, ο οποίος να αποτελεί «μέτρο» της πληθικότητας του συνόλου. Αυτό, στη γενικότητά του, είναι δύσκολο πρόβλημα.

Βασικοί πληθάριθμοι

- Αν το A είναι *πεπερασμένο*, δηλαδή αν υπάρχει $n \in \omega$ τέτοιο ώστε $A \sim n$, τότε θέτουμε: $|A| = n$.
- Αν το A είναι *αριθμήσιμο*, δηλαδή αν $A \sim \omega$, τότε θέτουμε: $|A| = \aleph_0$.
- Αν το A είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, τότε θέτουμε: $|A| = \mathfrak{c}$.

Παρατήρηση

Για κάθε σύνολο A, έχουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0,1\}$. Επομένως, θέτουμε:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Ειδικότερα:

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\omega)| = |{}^{\omega}\{0,1\}| = 2^{\aleph_0}.$$

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$.

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Παραδείγματα:

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Παραδείγματα:

- Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει ότι $n < \aleph_0$.

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Παραδείγματα:

- Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει ότι $n < \aleph_0$.
- Από το (διαγώνιο) Θεώρημα του Cantor, έχουμε ότι:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})} < \dots$$

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Παραδείγματα:

- Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει ότι $n < \aleph_0$.
- Από το (διαγώνιο) Θεώρημα του Cantor, έχουμε ότι:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})} < \dots$$

Η σχέση $\leqslant$ είναι προφανώς ανακλαστική και μεταβατική.

Σύγκριση πληθαρίθμων

Ορισμός

Έστω σύνολα A, B. Λέμε ότι το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το** B αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Γράφουμε: $|A| \leqslant |B|$.

Αντίστοιχα, $|A| < |B|$ σημαίνει: $|A| \leqslant |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Παραδείγματα:

- Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει ότι $n < \aleph_0$.
- Από το (διαγώνιο) Θεώρημα του Cantor, έχουμε ότι:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})} < \dots$$

Η σχέση $\leqslant$ είναι προφανώς ανακλαστική και μεταβατική. Επιπλέον:

Θεώρημα Cantor-Schröder-Bernstein

Η σχέση $\leqslant$ είναι αντισυμμετρική, δηλαδή: $(|A| \leqslant |B| \wedge |B| \leqslant |A|) \longrightarrow |A| = |B|$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές.
- Ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες. Π.χ., $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές.
- Ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες. Π.χ., $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
- Ισχύουν οι νόμοι των δυνάμεων. Π.χ., $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές.
- Ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες. Π.χ., $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
- Ισχύουν οι νόμοι των δυνάμεων. Π.χ., $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
- Οι πράξεις σέβονται τη διάταξη. Π.χ., αν $\lambda \leqslant \mu$, τότε $\kappa \cdot \lambda \leqslant \kappa \cdot \mu$.

Πράξεις με πληθαρίθμους

Ορισμοί

Έστω πληθάριθμοι κ και λ. Έστω (οποιαδήποτε) σύνολα A, B τέτοια ώστε $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$.

- Το **άθροισμα** $\kappa + \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$.
- Το **γινόμενο** $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του $A \times B$.
- Η **δύναμη** κ^λ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του ${}^B A$.

Μερικές ιδιότητες (ενδεικτικά)

- Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ είναι προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές.
- Ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες. Π.χ., $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.
- Ισχύουν οι νόμοι των δυνάμεων. Π.χ., $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
- Οι πράξεις σέβονται τη διάταξη. Π.χ., αν $\lambda \leqslant \mu$, τότε $\kappa \cdot \lambda \leqslant \kappa \cdot \mu$.
- Ειδικότερα, έχουμε: για κάθε $n \in \omega$, $n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ και $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$;

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$; Με άλλα λόγια, υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που να μην είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{R}$;

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$; Με άλλα λόγια, υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που να μην είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{R}$;

Ο Cantor, το 1878, διατύπωσε την ακόλουθη (εύλογη;) εικασία:

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$; Με άλλα λόγια, υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που να μην είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{R}$;

Ο Cantor, το 1878, διατύπωσε την ακόλουθη (εύλογη;) εικασία:

Υπόθεση του Συνεχούς - Continuum Hypothesis (CH)

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι «όχι»: κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει πληθάριθμο ή $\aleph_0$ ή $\mathfrak{c}$ (δηλ., είναι ή αριθμήσιμο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$).

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$; Με άλλα λόγια, υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που να μην είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{R}$;

Ο Cantor, το 1878, διατύπωσε την ακόλουθη (εύλογη;) εικασία:

Υπόθεση του Συνεχούς - Continuum Hypothesis (CH)

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι «όχι»: κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει πληθάριθμο ή $\aleph_0$ ή $\mathfrak{c}$ (δηλ., είναι ή αριθμήσιμο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$).

Σήμερα ξέρουμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς είναι *ανεξάρτητη* από τα αξιώματα της ZFC (υποθέτοντας ότι η ZFC είναι συνεπής).

Η Υπόθεση του Συνεχούς

Από το Θεώρημα του Cantor, ξέρουμε (αποδεικνύεται) ότι: $\aleph_0 < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Ερώτημα (εύλογο)

Υπάρχει πληθάριθμος γνησίως μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$; Με άλλα λόγια, υπάρχει υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που να μην είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{R}$;

Ο Cantor, το 1878, διατύπωσε την ακόλουθη (εύλογη;) εικασία:

Υπόθεση του Συνεχούς - Continuum Hypothesis (CH)

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι «όχι»: κάθε άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει πληθάριθμο ή $\aleph_0$ ή $\mathfrak{c}$ (δηλ., είναι ή αριθμήσιμο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$).

Σήμερα ξέρουμε ότι η Υπόθεση του Συνεχούς είναι *ανεξάρτητη* από τα αξιώματα της ZFC (υποθέτοντας ότι η ZFC είναι συνεπής).

Η ανεξαρτησία της CH προέκυψε από το συνδυασμό των αποτελεσμάτων του Gödel (1938) και του Cohen (1963) και αποτελεί ένα από τα κορυφαία μαθηματικά αποτελέσματα του 20ου αιώνα.

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

- Το ω με τη συνήθη διάταξή του είναι καλώς διατεταγμένο.

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

- Το ω με τη συνήθη διάταξή του είναι καλώς διατεταγμένο.
- Τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$, με τις συνήθεις διατάξεις τους, *δεν* είναι.

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

- Το ω με τη συνήθη διάταξή του είναι καλώς διατεταγμένο.
- Τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$, με τις συνήθεις διατάξεις τους, *δεν* είναι.

Τα καλά διατεταγμένα σύνολα αποτελούν «πρότυπα» στα οποία μπορούμε να επεκτείνουμε την αρχή της επαγωγής.

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

- Το ω με τη συνήθη διάταξή του είναι καλώς διατεταγμένο.
- Τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$, με τις συνήθεις διατάξεις τους, *δεν* είναι.

Τα καλά διατεταγμένα σύνολα αποτελούν «πρότυπα» στα οποία μπορούμε να επεκτείνουμε την αρχή της επαγωγής.

Πρόταση

Αν το $\langle A, < \rangle$ είναι καλώς διατεταγμένο, τότε δεν έχει άπειρη γνησίως φθίνουσα $<$-ακολουθία. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq A$ τέτοια ώστε:

$$\cdots\ x_{n+1} < x_n\ \cdots\ < x_1 < x_0\,.$$

Καλές διατάξεις

Ορισμός

Μία γνήσια γραμμική διάταξη $<$ ενός συνόλου A λέγεται **καλή διάταξη** αν κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή:

$$(\forall B)((B \subseteq A \wedge B \neq \varnothing) \longrightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)(x \leqslant y))$$

- Το ω με τη συνήθη διάταξή του είναι καλώς διατεταγμένο.
- Τα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$, με τις συνήθεις διατάξεις τους, *δεν* είναι.

Τα καλά διατεταγμένα σύνολα αποτελούν «πρότυπα» στα οποία μπορούμε να επεκτείνουμε την αρχή της επαγωγής.

Πρόταση

Αν το $\langle A, < \rangle$ είναι καλώς διατεταγμένο, τότε δεν έχει άπειρη γνησίως φθίνουσα $<$-ακολουθία. Δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq A$ τέτοια ώστε:

$$\cdots\ x_{n+1} < x_n\ \cdots\ < x_1 < x_0\,.$$

Αν $\langle A, < \rangle$ είναι καλώς διατεταγμένο και $a \in A$, τότε το *γνήσιο αρχικό τμήμα που ορίζεται από το* a είναι το $O_<(a) = \{x \in A : x < a\}$.

Υπερπεπερασμένη επαγωγή και συγκρισιμότητα

Θεώρημα (Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $X \subseteq A$. Αν, για κάθε $a \in A$, γνωρίζοντας ότι κάθε $b < a$ ανήκει στο X αρκεί για να συμπεράνουμε ότι και $a \in X$, τότε έπεται ότι $X = A$.

Υπερπεπερασμένη επαγωγή και συγκρισιμότητα

Θεώρημα (Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $X \subseteq A$. Αν, για κάθε $a \in A$, γνωρίζοντας ότι κάθε $b < a$ ανήκει στο X αρκεί για να συμπεράνουμε ότι και $a \in X$, τότε έπεται ότι $X = A$. Δηλαδή, για κάθε $X \subseteq A$:

$$((\forall\, a \in A)(O_<(a) \subseteq X \longrightarrow a \in X)) \longrightarrow X = A$$

Υπερπεπερασμένη επαγωγή και συγκρισιμότητα

Θεώρημα (Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $X \subseteq A$. Αν, για κάθε $a \in A$, γνωρίζοντας ότι κάθε $b < a$ ανήκει στο X αρκεί για να συμπεράνουμε ότι και $a \in X$, τότε έπεται ότι $X = A$. Δηλαδή, για κάθε $X \subseteq A$:

$$((\forall\, a \in A)(O_<(a) \subseteq X \longrightarrow a \in X)) \longrightarrow X = A$$

Αν $\langle A, < \rangle$ καλή διάταξη και το $a \in A$ δεν είναι μέγιστο, τότε έχει μοναδικό *αμέσως επόμενο* $a' \in A$ (δηλ., $a < a'$ και δεν υπάρχει $x \in A$ με $a < x < a'$).

Υπερπεπερασμένη επαγωγή και συγκρισιμότητα

Θεώρημα (Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $X \subseteq A$. Αν, για κάθε $a \in A$, γνωρίζοντας ότι κάθε $b < a$ ανήκει στο X αρκεί για να συμπεράνουμε ότι και $a \in X$, τότε έπεται ότι $X = A$. Δηλαδή, για κάθε $X \subseteq A$:

$$((\forall\, a \in A)(O_<(a) \subseteq X \longrightarrow a \in X)) \longrightarrow X = A$$

Αν $\langle A, < \rangle$ καλή διάταξη και το $a \in A$ δεν είναι μέγιστο, τότε έχει μοναδικό *αμέσως επόμενο* $a' \in A$ (δηλ., $a < a'$ και δεν υπάρχει $x \in A$ με $a < x < a'$).

Αν $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ είναι ισομορφικές (*όμοιες*) καλές διατάξεις, τότε ο ισομορφισμός (ομοιότητας) είναι μοναδικός.

Υπερπεπερασμένη επαγωγή και συγκρισιμότητα

Θεώρημα (Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $X \subseteq A$. Αν, για κάθε $a \in A$, γνωρίζοντας ότι κάθε $b < a$ ανήκει στο X αρκεί για να συμπεράνουμε ότι και $a \in X$, τότε έπεται ότι $X = A$. Δηλαδή, για κάθε $X \subseteq A$:

$$((\forall\, a \in A)(O_<(a) \subseteq X \longrightarrow a \in X)) \longrightarrow X = A$$

Αν $\langle A, < \rangle$ καλή διάταξη και το $a \in A$ δεν είναι μέγιστο, τότε έχει μοναδικό *αμέσως επόμενο* $a' \in A$ (δηλ., $a < a'$ και δεν υπάρχει $x \in A$ με $a < x < a'$).

Αν $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ είναι ισομορφικές (*όμοιες*) καλές διατάξεις, τότε ο ισομορφισμός (ομοιότητας) είναι μοναδικός.

Θεώρημα (Συγκρισιμότητα καλών διατάξεων)

Αν $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ καλές διατάξεις τότε ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των:

- οι $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ είναι ισομορφικές (όμοιες)
- η $\langle A, <_A \rangle$ είναι όμοια με αρχικό τμήμα της $\langle B, <_B \rangle$
- η $\langle B, <_B \rangle$ είναι όμοια με αρχικό τμήμα της $\langle A, <_A \rangle$

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.
- Το ω είναι διατακτικός αριθμός.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.
- Το ω είναι διατακτικός αριθμός.
- Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$, τότε και $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{ON}$.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.
- Το ω είναι διατακτικός αριθμός.
- Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$, τότε και $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{ON}$.

Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$ ισχύει ότι $\alpha \notin \alpha$ καθώς και ότι $\alpha = \{\beta : \beta \in \mathbf{ON} \wedge \beta \in \alpha\}$.

Διατακτικοί αριθμοί (I)

Οι διατακτικοί αποτελούν «ομοιόμορφα πρότυπα» των καλών διατάξεων.

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A, δηλαδή: $(\forall x)(x \in A \longrightarrow x \subseteq A)$.

Ορισμός

Ένα σύνολο α λέγεται **διατακτικός (αριθμός)** αν το α είναι μεταβατικό και η $\langle \alpha, \in \rangle$ είναι (γνήσια) καλή διάταξη.

Συνήθως, γράφουμε $\alpha \in \mathbf{ON}$ αντί για «το α είναι διατακτικός».

- Κάθε φυσικός αριθμός είναι διατακτικός αριθμός.
- Το ω είναι διατακτικός αριθμός.
- Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$, τότε και $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{ON}$.

Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$ ισχύει ότι $\alpha \notin \alpha$ καθώς και ότι $\alpha = \{\beta : \beta \in \mathbf{ON} \wedge \beta \in \alpha\}$.
Στους διατακτικούς, όπως και στους φυσικούς αριθμούς, ταυτίζουμε τη σχέση διάταξης $<$ με τη σχέση $\in$ του ανήκειν.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή $\mathbf{ON}$ των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή **ON** των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.
- Το $\varnothing$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός στην κλάση **ON**.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή $\mathbf{ON}$ των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.
- Το $\varnothing$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός στην κλάση $\mathbf{ON}$.
- Ένας $\alpha \in \mathbf{ON}$ λέγεται *οριακός* αν $\alpha \neq \varnothing$ και δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή $\mathbf{ON}$ των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.
- Το $\varnothing$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός στην κλάση $\mathbf{ON}$.
- Ένας $\alpha \in \mathbf{ON}$ λέγεται *οριακός* αν $\alpha \neq \varnothing$ και δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού. Κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$ με $\alpha \neq \varnothing$ είναι είτε επόμενος ή οριακός.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή $\mathbf{ON}$ των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.
- Το $\varnothing$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός στην κλάση $\mathbf{ON}$.
- Ένας $\alpha \in \mathbf{ON}$ λέγεται *οριακός* αν $\alpha \neq \varnothing$ και δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού. Κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$ με $\alpha \neq \varnothing$ είναι είτε επόμενος ή οριακός.

Θεώρημα

Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A, < \rangle$ είναι ισομορφικό (όμοιο) με μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Διατακτικοί αριθμοί (II)

Ιδιότητες των διατακτικών αριθμών

- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$: $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha \in \beta \longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.
- Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$.
- Αν $A \neq \varnothing$ είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcap A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcap A = \min A$.
- Αν A είναι σύνολο διατακτικών, τότε $\bigcup A \in \mathbf{ON}$ και $\bigcup A = \sup A$ (δηλ., ο ελάχιστος διατακτικός που είναι $\geqslant$ από κάθε διατακτικό του A).
- Για κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$, ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο (αμέσως) *επόμενος* του α.
- Η συλλογή $\mathbf{ON}$ των διατακτικών είναι γνήσια κλάση.
- Το $\varnothing$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός στην κλάση $\mathbf{ON}$.
- Ένας $\alpha \in \mathbf{ON}$ λέγεται *οριακός* αν $\alpha \neq \varnothing$ και δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού. Κάθε $\alpha \in \mathbf{ON}$ με $\alpha \neq \varnothing$ είναι είτε επόμενος ή οριακός.

Θεώρημα (χρησιμοποιεί το A7 - επόμενη διαφάνεια)

Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο $\langle A, < \rangle$ είναι ισομορφικό (όμοιο) με μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & & n & & \omega \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \cdots & \circ \end{array}$$

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Εν συνεχεία, ξεκινώντας από το ω, μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους επόμενους διατακτικούς ω^+, ω^{++}, ω^{+++}, κ.ο.κ, δηλαδή τον ω^{+n} για κάθε *συγκεκριμένο* πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών της πράξης του επόμενου.

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Εν συνεχεία, ξεκινώντας από το ω, μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους επόμενους διατακτικούς ω^+, ω^{++}, ω^{+++}, κ.ο.κ, δηλαδή τον ω^{+n} για κάθε *συγκεκριμένο* πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών της πράξης του επόμενου.

Θα θέλαμε, φυσιολογικά, να θεωρήσουμε το sup αυτής της ακολουθίας και να ορίσουμε έτσι τον (οριακό) διατακτικό που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλους αυτούς.

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Εν συνεχεία, ξεκινώντας από το ω, μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους επόμενους διατακτικούς ω^+, ω^{++}, ω^{+++}, κ.ο.κ, δηλαδή τον ω^{+n} για κάθε *συγκεκριμένο* πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών της πράξης του επόμενου.

Θα θέλαμε, φυσιολογικά, να θεωρήσουμε το sup αυτής της ακολουθίας και να ορίσουμε έτσι τον (οριακό) διατακτικό που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλους αυτούς.

Δυστυχώς όμως, τίποτε μέχρι στιγμής δε μάς εγγυάται την ύπαρξη του συνόλου $\{\omega^{+n} : n \in \omega\}$ (του οποίου θα θέλαμε να θεωρήσουμε την $\bigcup$).

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Εν συνεχεία, ξεκινώντας από το ω, μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους επόμενους διατακτικούς ω^+, ω^{++}, ω^{+++}, κ.ο.κ, δηλαδή τον ω^{+n} για κάθε *συγκεκριμένο* πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών της πράξης του επόμενου.

Θα θέλαμε, φυσιολογικά, να θεωρήσουμε το sup αυτής της ακολουθίας και να ορίσουμε έτσι τον (οριακό) διατακτικό που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλους αυτούς.

Δυστυχώς όμως, τίποτε μέχρι στιγμής δε μάς εγγυάται την ύπαρξη του συνόλου $\{\omega^{+n} : n \in \omega\}$ (του οποίου θα θέλαμε να θεωρήσουμε την $\bigcup$).

A7. Αξιωματικό σχήμα Αντικατάστασης (Axiom scheme of Replacement)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x, y)$ ο οποίος ορίζει *συνάρτηση*. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) οι εικόνες των στοιχείων του A μέσω του Φ.

Αντικατάσταση

Προς το παρόν, ξέρουμε ότι το αρχικό τμήμα της κλάσης **ON** μοιάζει έτσι:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{n}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Εν συνεχεία, ξεκινώντας από το ω, μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους επόμενους διατακτικούς ω^+, ω^{++}, ω^{+++}, κ.ο.κ, δηλαδή τον ω^{+n} για κάθε *συγκεκριμένο* πεπερασμένο αριθμό εφαρμογών της πράξης του επόμενου.

Θα θέλαμε, φυσιολογικά, να θεωρήσουμε το sup αυτής της ακολουθίας και να ορίσουμε έτσι τον (οριακό) διατακτικό που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλους αυτούς.

Δυστυχώς όμως, τίποτε μέχρι στιγμής δε μάς εγγυάται την ύπαρξη του συνόλου $\{\omega^{+n} : n \in \omega\}$ (του οποίου θα θέλαμε να θεωρήσουμε την $\bigcup$).

A7. Αξιωματικό σχήμα Αντικατάστασης (Axiom scheme of Replacement)

Έστω δεδομένος τύπος $\Phi(x, y)$ ο οποίος ορίζει *συνάρτηση*. Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) οι εικόνες των στοιχείων του A μέσω του Φ. Δηλαδή, δεδομένου *συναρτησιακού* τύπου $\Phi(x, y)$:

$$(\forall A)(\exists z)(\forall y)(y \in z \longleftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y)))$$

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών (περιγραφή)

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών (περιγραφή)

- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της καλής διάταξης του $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ που «βάζει όλα τα στοιχεία του α πριν από όλα του β» τον γράφουμε $\alpha + \beta$.

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών (περιγραφή)

- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της καλής διάταξης του $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ που «βάζει όλα τα στοιχεία του α πριν από όλα του β» τον γράφουμε $\alpha + \beta$.
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της λεξικογραφικής (καλής) διάταξης του $\beta \times \alpha$ τον γράφουμε $\alpha \cdot \beta$ («σειρά μήκους β από αντίγραφα τύπου α»).

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών (περιγραφή)

- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της καλής διάταξης του $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ που «βάζει όλα τα στοιχεία του α πριν από όλα του β» τον γράφουμε $\alpha + \beta$.
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της λεξικογραφικής (καλής) διάταξης του $\beta \times \alpha$ τον γράφουμε $\alpha \cdot \beta$ («σειρά μήκους β από αντίγραφα τύπου α»).

Οι πράξεις **δεν** είναι αντιμεταθετικές.

Πράξεις με διατακτικούς

Με χρήση της αντικατάστασης, συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών, πέραν του ω.

Ο (πλέον υπαρκτός) διατακτικός που εμφανίζεται αμέσως μετά από όλα τα ω^{+n} συμβολίζεται με $\omega + \omega$ ή με $\omega \cdot 2$.

Διαισθητικά, οι δύο βασικές «πράξεις» στον σχηματισμό νέων διατακτικών είναι «θεωρούμε τον αμέσως επόμενο του τρέχοντος» και «θεωρούμε το sup όσων έχουμε ήδη».

Με αυτές τις «πράξεις», ο Cantor έλεγε ότι κανείς μπορεί να *σπάσει κάθε φραγμό και να οδηγηθεί σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών*.

Πρόσθεση & πολλαπλασιασμός διατακτικών (περιγραφή)

- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της καλής διάταξης του $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ που «βάζει όλα τα στοιχεία του α πριν από όλα του β» τον γράφουμε $\alpha + \beta$.
- Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, τον τύπο της λεξικογραφικής (καλής) διάταξης του $\beta \times \alpha$ τον γράφουμε $\alpha \cdot \beta$ («σειρά μήκους β από αντίγραφα τύπου α»).

Οι πράξεις **δεν** είναι αντιμεταθετικές. Αν ο $\beta \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, ισχύουν:
$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi : \xi < \beta\}$ και $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \beta\}$.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$\overset{0}{\circ}$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$\overset{0}{\circ}$ $\overset{1}{\circ}$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \dots$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \cdots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \cdots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \cdots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \cdots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_\omega}{\bullet}$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\circ}\ \overset{1}{\circ}\ \overset{2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega}{\circ}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1}{\circ}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_2}{\circ}\ \cdots\ \overset{\omega_\alpha}{\circ}\ \cdots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_\omega}{\bullet}\ \cdots\ \overset{\aleph_{\omega_1}}{\bullet}\ \cdots$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «ℵ»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \omega \quad \omega{+}1 \quad \omega{+}2 \quad \dots \quad \omega{+}\omega \quad \dots \quad \omega{\cdot}\omega \quad \dots \quad \omega_1 \quad \omega_1{+}1 \quad \dots \quad \omega_1{+}\omega \quad \dots \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_\alpha \quad \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad \aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \dots \quad \aleph_n \quad \dots \quad \aleph_\omega \quad \dots \quad \aleph_{\omega_1} \quad \dots\dots \quad \aleph_\alpha \quad \dots$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega}{\bullet}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\bullet}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_\omega}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_{\omega_1}}{\bullet}\ \dots\dots\ \overset{\aleph_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega}{\bullet}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\bullet}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_\omega}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_{\omega_1}}{\bullet}\ \dots\dots\ \overset{\aleph_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Ο Cantor έδειξε ότι $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Αρχικοί διατακτικοί και οι πληθάριθμοι «$\aleph$»

Θεωρώντας όλες τις πιθανές καλές διατάξεις του ω, προκύπτει η συλλογή όλων των *αριθμήσιμων* διατακτικών.

Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, αλλά όχι αριθμήσιμος, και συμβολίζεται με ω_1. Η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές.

Ένας άπειρος διατακτικός κ λέγεται **αρχικός** ή **πληθάριθμος** αν δεν είναι ισοπληθικός με κανένα $\alpha < \kappa$. Ένας τέτοιος κ είναι αναγκαστικά οριακός.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος $> \kappa$ λέγεται **ο επόμενος πληθάριθμος του** κ και συμβολίζεται με κ^+.

Ορίζουμε, αναδρομικά, την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ως εξής: $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ και, αν λ οριακός, τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Διατακτικοί αριθμοί:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega}{\bullet}\ \overset{\omega+1}{\circ}\ \overset{\omega+2}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega\cdot\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1}{\bullet}\ \overset{\omega_1+1}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_1+\omega}{\circ}\ \dots\ \overset{\omega_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\omega_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Πληθάριθμοι:

$$\overset{0}{\bullet}\ \overset{1}{\bullet}\ \overset{2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_0}{\bullet}\ \overset{\aleph_1}{\bullet}\ \overset{\aleph_2}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_n}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_\omega}{\bullet}\ \dots\ \overset{\aleph_{\omega_1}}{\bullet}\ \dots\dots\ \overset{\aleph_\alpha}{\bullet}\ \dots$$

Ο Cantor έδειξε ότι $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Η Υπόθεση του Συνεχούς λέει ότι $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα:

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **κανονικός** (**regular**) αν $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Αλλιώς, αν δηλαδή $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, ο πληθάριθμος κ λέγεται **ιδιάζων** (**singular**).

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **κανονικός** (**regular**) αν $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Αλλιώς, αν δηλαδή $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, ο πληθάριθμος κ λέγεται **ιδιάζων** (**singular**).

Για παράδειγμα, ο $\aleph_0$ καθώς και οι $\aleph_n$, για κάθε $n > 0$, είναι όλοι κανονικοί πληθάριθμοι.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **κανονικός** (**regular**) αν $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Αλλιώς, αν δηλαδή $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, ο πληθάριθμος κ λέγεται **ιδιάζων** (**singular**).

Για παράδειγμα, ο $\aleph_0$ καθώς και οι $\aleph_n$, για κάθε $n > 0$, είναι όλοι κανονικοί πληθάριθμοι. Ο πρώτος ιδιάζων πληθάριθμος είναι ο $\aleph_\omega$, αφού $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \omega$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **κανονικός** (**regular**) αν $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Αλλιώς, αν δηλαδή $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, ο πληθάριθμος κ λέγεται **ιδιάζων** (**singular**).

Για παράδειγμα, ο $\aleph_0$ καθώς και οι $\aleph_n$, για κάθε $n > 0$, είναι όλοι κανονικοί πληθάριθμοι. Ο πρώτος ιδιάζων πληθάριθμος είναι ο $\aleph_\omega$, αφού $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \omega$.

Πρόταση

Κάθε επόμενος πληθάριθμος είναι κανονικός, δηλ., $\mathrm{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$.

Ομοτελικότητα

Υπενθύμιση: δεδομένου οριακού διατακτικού α και συνάρτησης $f : \gamma \longrightarrow \alpha$, για κάποιο $\gamma \in \mathbf{ON}$, η f λέγεται **μη φραγμένη στο** α αν, για κάθε $\xi < \alpha$, υπάρχει $\beta < \gamma$ τέτοιο ώστε $\xi < f(\beta)$.

Ορισμός ομοτελικότητας (cofinality)

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα** του α, που γράφεται $\mathrm{cof}(\alpha)$, είναι ο ελάχιστος $\gamma \in \mathbf{ON}$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη $f : \gamma \longrightarrow \alpha$.

Παραδείγματα: $\mathrm{cof}(\omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega + \omega) = \omega$, $\mathrm{cof}(\omega_1) = \omega_1$, $\mathrm{cof}(\omega_\omega) = \omega$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **κανονικός** (**regular**) αν $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Αλλιώς, αν δηλαδή $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$, ο πληθάριθμος κ λέγεται **ιδιάζων** (**singular**).

Για παράδειγμα, ο $\aleph_0$ καθώς και οι $\aleph_n$, για κάθε $n > 0$, είναι όλοι κανονικοί πληθάριθμοι. Ο πρώτος ιδιάζων πληθάριθμος είναι ο $\aleph_\omega$, αφού $\mathrm{cof}(\aleph_\omega) = \omega$.

Πρόταση (χρησιμοποιεί το AC - επόμενη διαφάνεια)

Κάθε επόμενος πληθάριθμος είναι κανονικός, δηλ., $\mathrm{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του. Χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του. Χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι (μη κενή) οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε το γενικευμένο καρτεσιανό της γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κένο.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του. Χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι (μη κενή) οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε το γενικευμένο καρτεσιανό της γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κένο.
- Το **Λήμμα του Zorn**: αν $\langle A, \leqslant\rangle$ μερική διάταξη τ.ω. κάθε *αλυσίδα* της έχει άνω φράγμα στο A, τότε υπάρχει *μεγιστικό* στοιχείο στο A.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του. Χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι (μη κενή) οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε το γενικευμένο καρτεσιανό της γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κένο.
- Το **Λήμμα του Zorn**: αν $\langle A, \leqslant\rangle$ μερική διάταξη τ.ω. κάθε *αλυσίδα* της έχει άνω φράγμα στο A, τότε υπάρχει *μεγιστικό* στοιχείο στο A.
- Η **Αρχή της Καλής Διάταξης**: κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο.

Το αξίωμα της επιλογής

Ορισμός

Έστω σύνολο A. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για το A αν, για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \varnothing$, ισχύει $f(X) \in X$.

A8. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

Κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο (εκτός των άλλων) και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του. Χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι (μη κενή) οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε το γενικευμένο καρτεσιανό της γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κένο.
- Το **Λήμμα του Zorn**: αν $\langle A, \leqslant\rangle$ μερική διάταξη τ.ω. κάθε *αλυσίδα* της έχει άνω φράγμα στο A, τότε υπάρχει *μεγιστικό* στοιχείο στο A.
- Η **Αρχή της Καλής Διάταξης**: κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο.
- Κάθε δύο σύνολα συγκρίνονται ως προς την πληθικότητά τους, δηλ. για κάθε A, B, είτε $|A| \leqslant |B|$ ή $|B| \leqslant |A|$.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: σε κάθε πλήρη μετρικό χώρο, η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό σύνολο.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: σε κάθε πλήρη μετρικό χώρο, η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό σύνολο.
- Το Θεώρημα Tikhonov στην τοπολογία: το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «ℵ», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: σε κάθε πλήρη μετρικό χώρο, η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό σύνολο.
- Το Θεώρημα Tikhonov στην τοπολογία: το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος. (*Ισοδύναμο* του AC)

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «$\aleph$», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: σε κάθε πλήρη μετρικό χώρο, η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό σύνολο.
- Το Θεώρημα Tikhonov στην τοπολογία: το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Vitali: υπάρχει μη Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Συνέπειες της επιλογής

Το AC έχει πολλές σημαντικές συνέπειες, τόσο στη συνολοθεωρία όσο και στα υπόλοιπα μαθηματικά. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο «$\aleph$», δηλαδή, για κάθε (άπειρο) A υπάρχει $\alpha \in \mathbf{ON}$ τέτοιο ώστε $|A| = \aleph_\alpha$.
- Για κάθε άπειρο A, ισχύει $|A \times A| = |A|$. Δηλαδή, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ, ισχύει $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. (Αυτό είναι μάλιστα *ισοδύναμο* του AC)
- Κανόνες πληθικής αριθμητικής: αν κ, λ άπειροι πληθάριθμοι, τότε $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Κατηγορίας του Baire: σε κάθε πλήρη μετρικό χώρο, η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων είναι πυκνό σύνολο.
- Το Θεώρημα Tikhonov στην τοπολογία: το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος. (*Ισοδύναμο* του AC)
- Το Θεώρημα Vitali: υπάρχει μη Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
- Κάποια «αντιδιαισθητικά παράδοξα» σαν το Παράδοξο του Hausdorff και το Παράδοξο των Banach–Tarski.

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots \; a_{n+1} \in a_n \; \cdots \; \in a_1 \in a_0 \, .$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots \; a_{n+1} \in a_n \; \cdots \; \in a_1 \in a_0 \, .$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης λέει ότι κάθε $A \neq \varnothing$ είναι καλώς θεμελιωμένο.

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots\ a_{n+1} \in a_n\ \cdots\ \in a_1 \in a_0\,.$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης λέει ότι κάθε $A \neq \varnothing$ είναι καλώς θεμελιωμένο.
Ισοδύναμα:

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots\ a_{n+1} \in a_n\ \cdots\ \in a_1 \in a_0\,.$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης λέει ότι κάθε $A \neq \varnothing$ είναι καλώς θεμελιωμένο. Ισοδύναμα:

A9. Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (Axiom of Foundation)

Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο.

$$(\forall A)\,(A \neq \varnothing \longrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \cap A = \varnothing))$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots\ a_{n+1} \in a_n\ \cdots\ \in a_1 \in a_0\,.$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης λέει ότι κάθε $A \neq \varnothing$ είναι καλώς θεμελιωμένο. Ισοδύναμα:

A9. Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (Axiom of Foundation)

Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο.

$$(\forall A)\,(A \neq \varnothing \longrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \cap A = \varnothing))$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης είναι άσχετο με τα υπόλοιπα μαθηματικά.

Το αξίωμα της θεμελίωσης

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **καλώς θεμελιωμένο** αν δεν υπάρχει άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα από στοιχεία του A, δηλαδή, δεν υπάρχει ακολουθία της μορφής:

$$\cdots\ a_{n+1} \in a_n\ \cdots\ \in a_1 \in a_0\,.$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης λέει ότι κάθε $A \neq \varnothing$ είναι καλώς θεμελιωμένο. Ισοδύναμα:

A9. Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (Axiom of Foundation)

Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο.

$$(\forall A)\,(A \neq \varnothing \longrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \cap A = \varnothing))$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης είναι άσχετο με τα υπόλοιπα μαθηματικά.

Είναι καίριο για την ίδια τη θεωρία συνόλων: κάνει το συνολοθεωρητικό σύμπαν συγκεκριμένο και διαχειρίσιμο, κατασκευασμένο «από τα κάτω», ξεκινώντας από το κενό.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} V_\alpha$.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} V_\alpha$.

Αντίστοιχα, για την κλάση L των *κατασκευάσιμων* συνόλων του Gödel, για κάθε $\alpha + 1 \in \mathbf{ON}$ θεωρούμε μόνο τα υποσύνολα του τρέχοντος L_α που είναι *ορίσιμα* (στο L_α, ίσως με παραμέτρους) από κάποιον πρωτοβάθμιο τύπο.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (I)

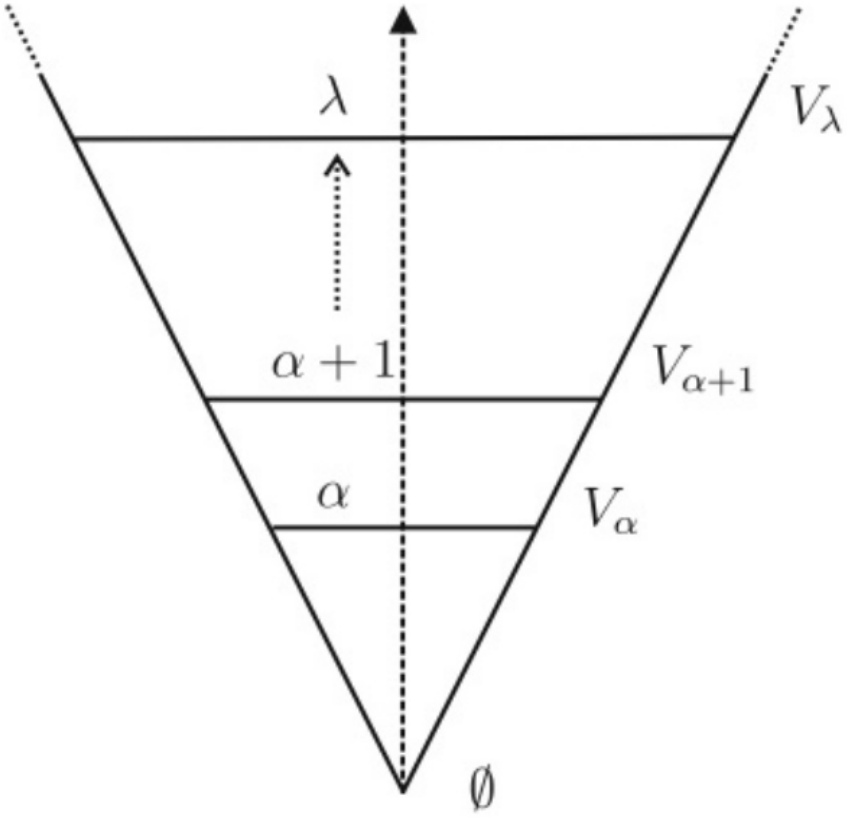
Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση **ON** των διατακτικών:

- Αρχικά θέτουμε $V_0 = \varnothing$.
- (Επόμενος διατακτικός)
  Δεδομένου V_α, για κάποιο $\alpha \in \mathbf{ON}$, θέτουμε $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$.
- (Οριακός διατακτικός)
  Αν $\lambda \in \mathbf{ON}$ είναι οριακός, θέτουμε $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$.
- Τέλος, θέτουμε $V = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} V_\alpha$.

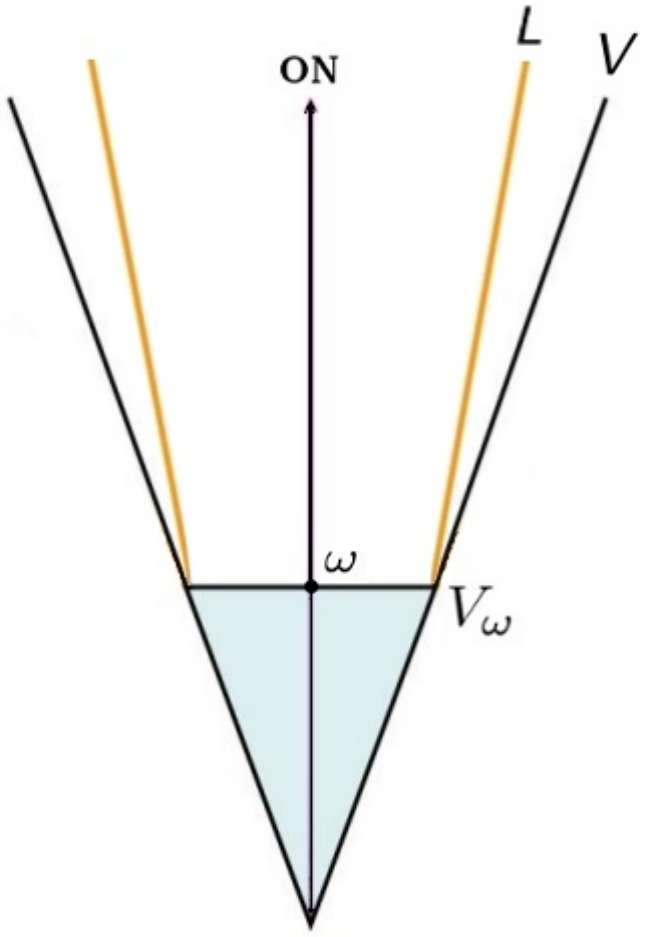
Αντίστοιχα, για την κλάση L των *κατασκευάσιμων* συνόλων του Gödel, για κάθε $\alpha + 1 \in \mathbf{ON}$ θεωρούμε μόνο τα υποσύνολα του τρέχοντος L_α που είναι *ορίσιμα* (στο L_α, ίσως με παραμέτρους) από κάποιον πρωτοβάθμιο τύπο.

Οι (γνήσιες) κλάσεις V και L αποτελούν αρχετυπικά «μοντέλα» της ZFC.

Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (II)



Καλώς θεμελιωμένα σύνολα (II)



Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης**: αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.
8. **Αξίωμα της επιλογής:** κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.

Τα αξιώματα της ZFC

1. **Αξίωμα της έκτασης:** αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.
2. **Αξίωμα του ζεύγους:** δεδομένων A και B, υπάρχει το σύνολο $\{A, B\}$.
3. **Αξίωμα της ένωσης:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\bigcup A$.
4. **Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x)$, υπάρχει το σύνολο $\{x \in A : \Phi(x)\}$.
5. **Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:** δεδομένου A, υπάρχει το σύνολο $\mathcal{P}(A)$.
6. **Αξίωμα του απείρου:** υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.
7. **Αξιωματικό σχήμα αντικατάστασης:** δεδομένου A και τύπου $\Phi(x, y)$ που ορίζει συνάρτηση, υπάρχει το σύνολο $\{y : (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x, y))\}$.
8. **Αξίωμα της επιλογής:** κάθε σύνολο έχει συνάρτηση επιλογής.
9. **Αξίωμα της θεμελίωσης:** κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο.

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).
- **Η Εικασία του Borel**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Laver (1976).

Το φαινόμενο της ανεξαρτησίας

Η εισαγωγή της μεθόδου της «επιβολής», ή «εξαναγκασμού» (forcing), από τον Cohen, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία και η χρήση της οδήγησε σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορα μαθηματικά πεδία.

Έτσι, παρά την εκφραστική και ενοποιητική ισχύ της θεωρίας συνόλων, είναι πλέον γνωστό πως πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα από τα αξιώματα της ZFC.

Μερικά χαρακτηριστικά (και ιστορικά) παραδείγματα:

- **Η Υπόθεση του Souslin**, από τη Θεωρία διατάξεων.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Jech (1967), Tennenbaum (1968), Solovay & Tennenbaum (1971).
- **Το Πρόβλημα του Whitehead**, από την Άλγεβρα.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Shelah (1974).
- **Η Εικασία του Borel**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τον Laver (1976).
- **Η Εικασία του Kaplansky**, από την Ανάλυση.
  Ανεξαρτησία με forcing από τους Solovay & Woodin (1976).

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων διατείνονται την ύπαρξη ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τις ιδιότητες που ικανοποιούν) άπειρων συνόλων.

Αναζήτηση νέων αξιωμάτων

Η κατανόηση πως η ZFC είναι αρκετά αδύναμη ως προς την επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων μάς οδηγεί στο να αναζητήσουμε νέα, επιπλέον αξιώματα, με σκόπο τη δημιουργία μίας ενισχυμένης θεωρίας.

Θα θέλαμε η νέα, ενισχυμένη θεωρία που θα προκύψει (εκτός του να είναι συνεπής!) να αποφασίζει όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ανεξάρτητα προβλήματα, με κύριο παράδειγμα την Υπόθεση του Συνεχούς (CH).

Δύο κυρίαρχα (και εκτενώς μελετημένα) είδη αξιωμάτων:

- **Αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων** (large cardinal axioms)
- **Αξιώματα forcing** (forcing axioms)

(Παρά τη στενή σύνδεση των δύο ειδών, εδώ ασχολούμαστε μόνο με τα πρώτα.)

Τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων διατείνονται την ύπαρξη ολοένα και ισχυρότερων (ως προς τις ιδιότητες που ικανοποιούν) άπειρων συνόλων.

Ιστορικά, το πρώτο παράδειγμα (ήδη από τον Hausdorff) είναι αυτό του «απρόσιτου» (inaccessible) πληθαρίθμου.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models$ ZFC.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC (και άρα και μη αποδείξιμα από αυτήν, εκτός κι αν η ZFC ασυνεπής).

Inaccessible πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **inaccessible** αν είναι κανονικός, δηλ. $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$, και ικανοποιεί την ιδιότητα: αν $\lambda < \kappa$, τότε $2^\lambda < \kappa$.

Παρατηρήσεις:

- Ο ορισμός γενικεύει ιδιότητες του ω, σε μεγαλύτερα κ.
- Αν ο κ είναι inaccessible, τότε $V_\kappa \models \mathrm{ZFC}$.

Έπεται πως (αν η ZFC είναι συνεπής, τότε) η ZFC δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθαρίθμων.

Γενικά, τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερα, ως προς την ισχύ συνέπειας, από τη ZFC (και άρα και μη αποδείξιμα από αυτήν, εκτός κι αν η ZFC ασυνεπής).

Τα αξιώματα αυτά δημιουργούν μία ιεραρχία (δείτε διάγραμμα) μέσω της οποίας μπορούμε να «μετρήσουμε» (συγκρίνοντας) την ισχύ συνέπειας οποιασδήποτε ανεξάρτητης συνολοθεωρητικής (μαθηματικής) πρότασης.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**:

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την ιδιότητα: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την ιδιότητα: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την ιδιότητα: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γράφεται, συνήθως, με το «συμβολισμό του βέλους»:

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2 \,,$$

όπου ο κάτω δείκτης «2», ο οποίος αναφέρεται στο πεδίο τιμών $2 = \{0, 1\}$ της συνάρτησης «χρωματισμού» f, συνήθως παραλείπεται.

Weakly compact πληθάριθμοι

Θυμηθείτε το **Λήμμα του König**: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και έχει την ιδιότητα: κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου τα επίπεδα είναι όλα μεγέθους $< \kappa$ έχει ένα κλαδί μήκους κ.

Πρόταση

Ο $\kappa > \omega$ είναι weakly compact αν και μόνο αν, για κάθε $f : [\kappa]^2 \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ με $|H| = \kappa$ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γράφεται, συνήθως, με το «συμβολισμό του βέλους»:

$$\kappa \longrightarrow (\kappa)^2_2 \,,$$

όπου ο κάτω δείκτης «2», ο οποίος αναφέρεται στο πεδίο τιμών $2 = \{0, 1\}$ της συνάρτησης «χρωματισμού» f, συνήθως παραλείπεται.

Οι weakly compact έχουν πλειάδα εναλλακτικών χαρακτηρισμών.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact.

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0, 1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

$$\mathrm{Con}(\exists\,\text{Ramsey}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\omega\text{-Erdös}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{weakly compact}) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{inaccessible}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})\,.$$

ω-Erdös και Ramsey πληθάριθμοι

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται ω-**Erdös** αν είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος για τον οποίον ισχύει ότι, για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει ένα άπειρο $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\omega)^{<\omega}$.

Ορισμός

Ο πληθάριθμος κ λέγεται **Ramsey** αν για κάθε $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \{0,1\}$, υπάρχει $H \subseteq \kappa$ τέτοιο ώστε $|H| = \kappa$ και, για κάθε $n \in \omega$, η f είναι σταθερή στο $[H]^n$.

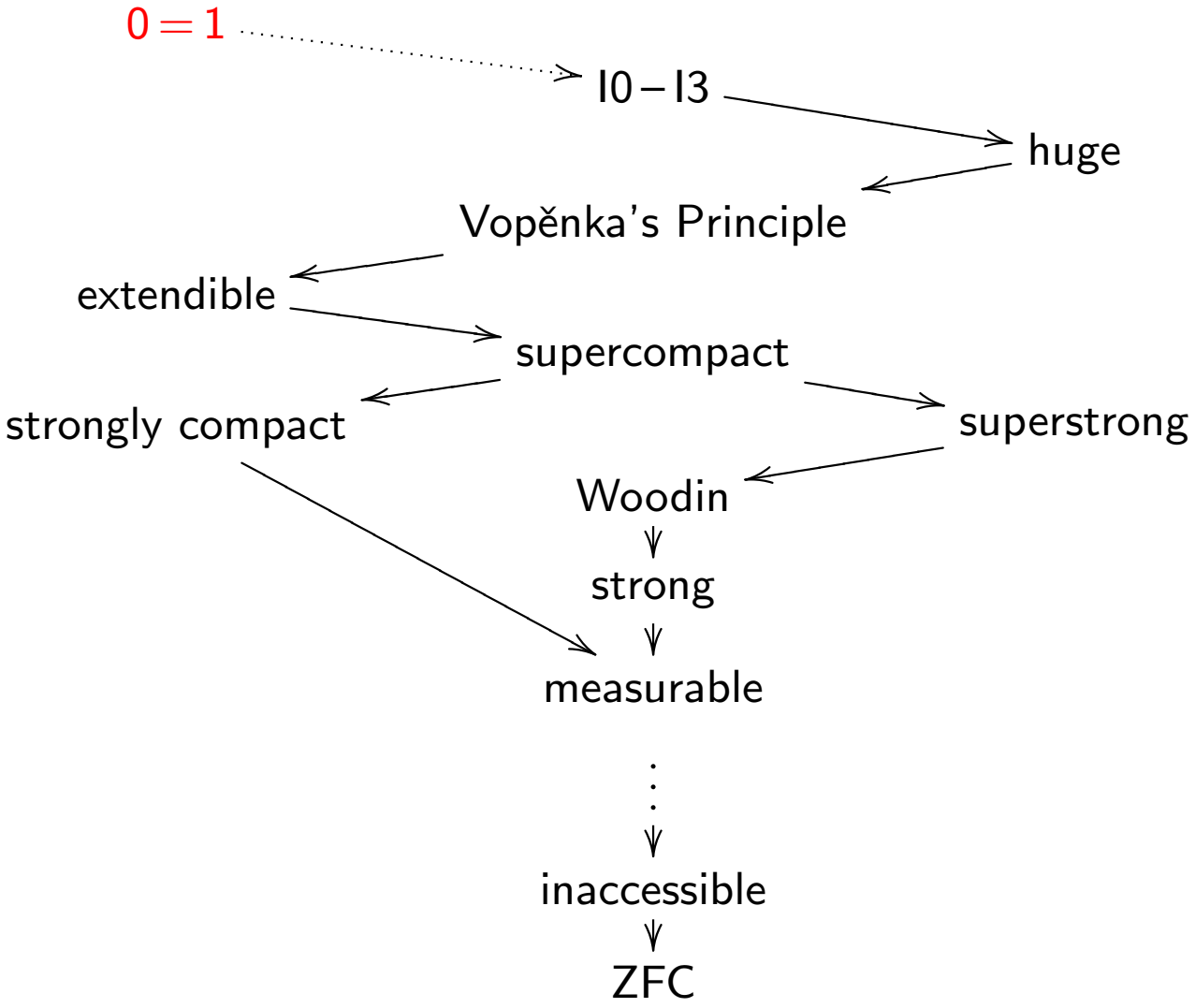
Στο συμβολισμό του βέλους, αυτό λέει ότι: $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$.

Προφανώς κάθε Ramsey (αλλά όχι ο ω-Erdös) πληθάριθμος είναι επίσης weakly compact. Ως προς τη σχετική τους συνέπεια, έχουμε το εξής:

$\mathrm{Con}(\exists\,\text{Ramsey}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\omega\text{-Erdös}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{weakly compact}) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \mathrm{Con}(\exists\,\text{inaccessible}) \Longrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$.

Εκτός των Ramsey, όλοι αυτοί οι πληθάριθμοι είναι συμβατοί με το $V = L$.

Το διάγραμμα των μεγάλων πληθαρίθμων



Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:

Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:

measurable

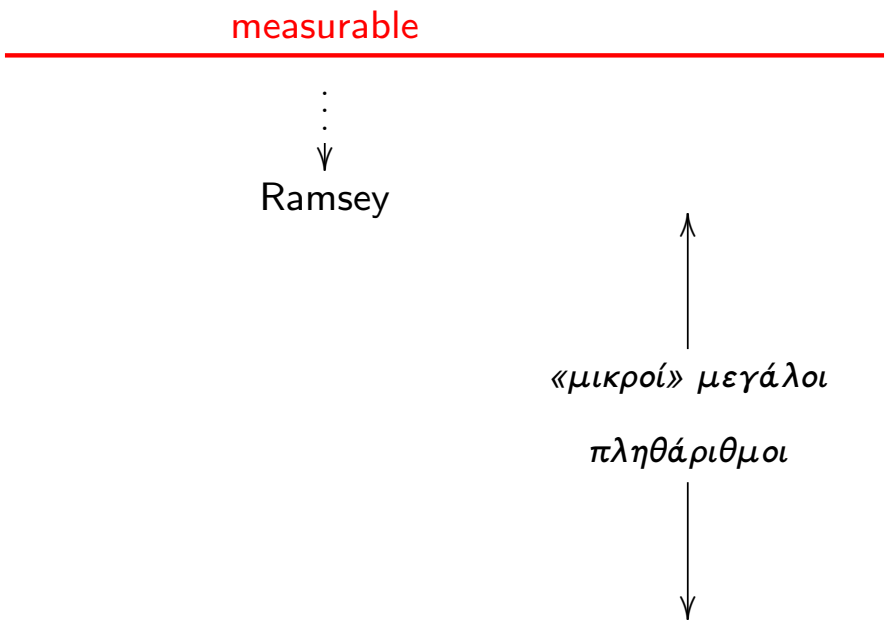
$\uparrow$

«μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι

$\downarrow$

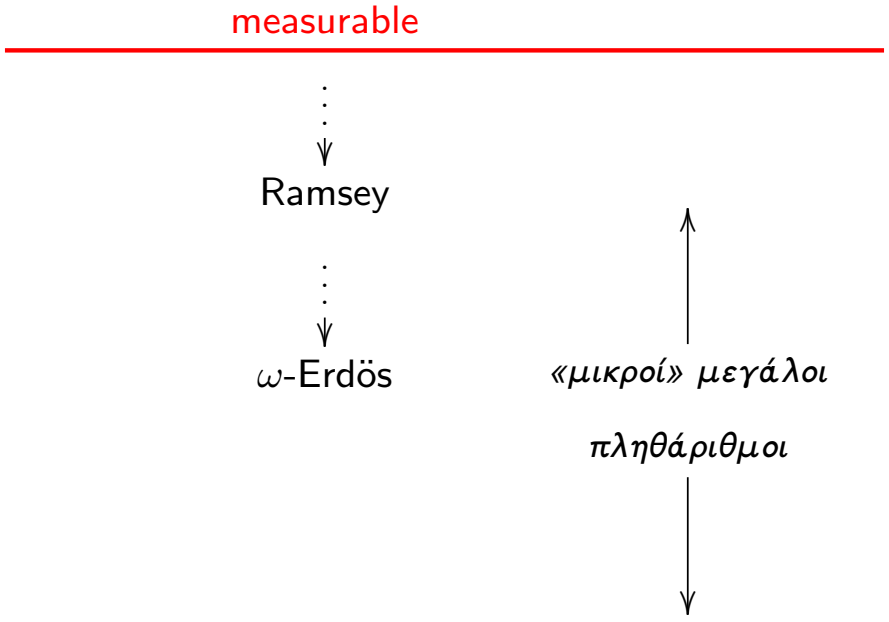
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



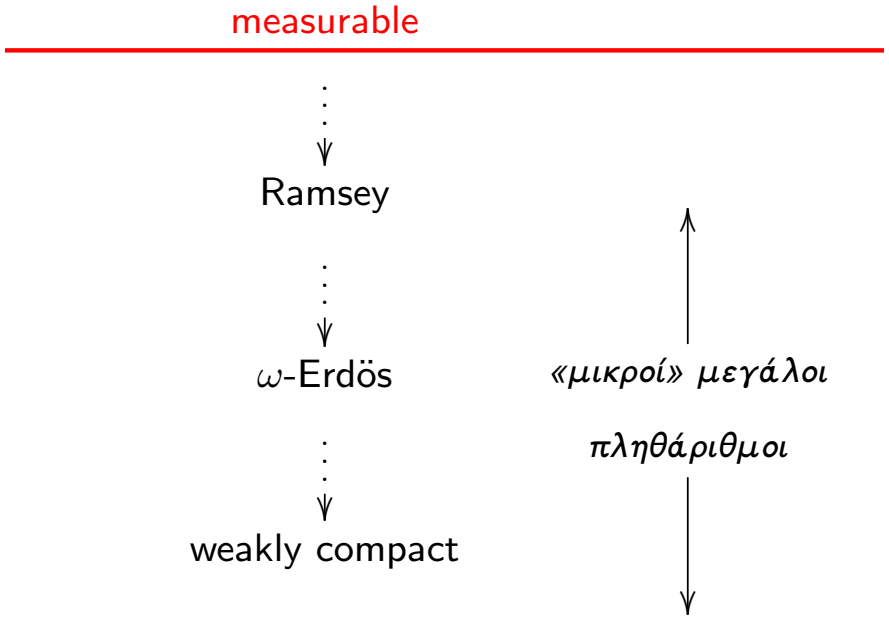
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



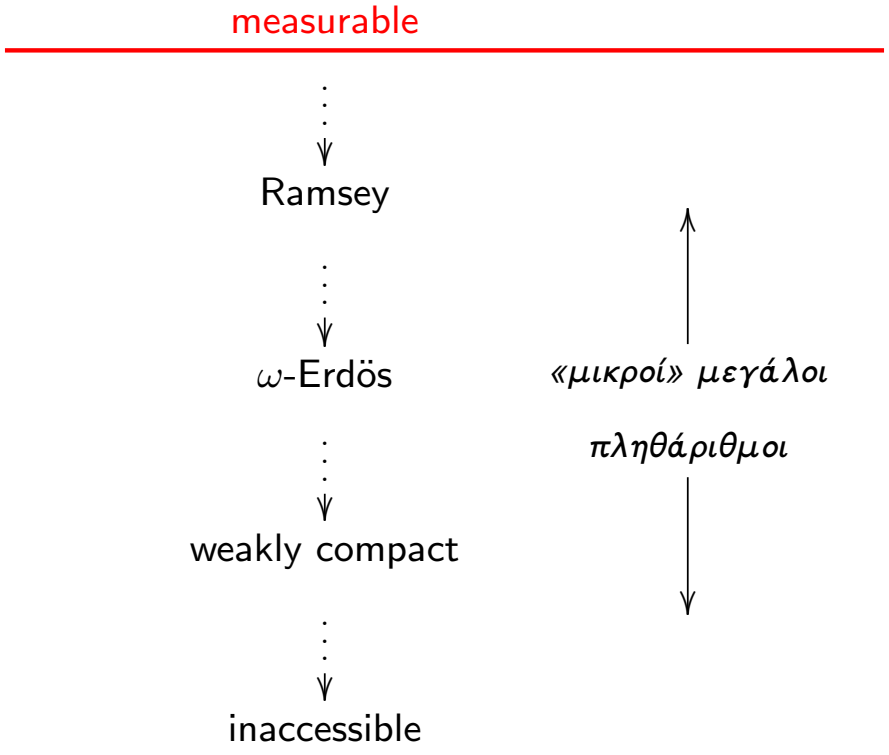
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



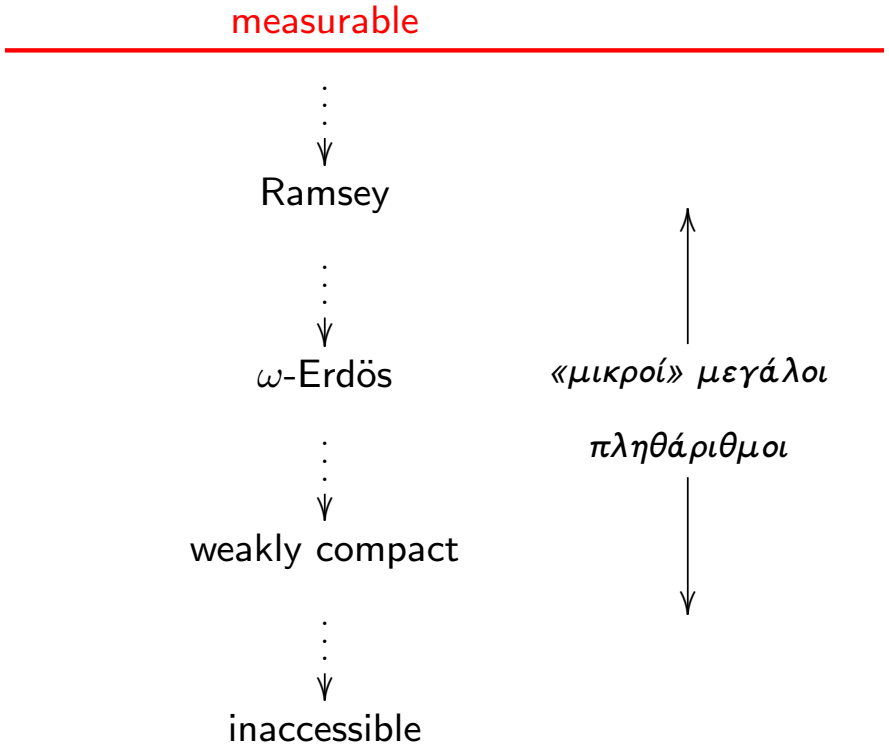
Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

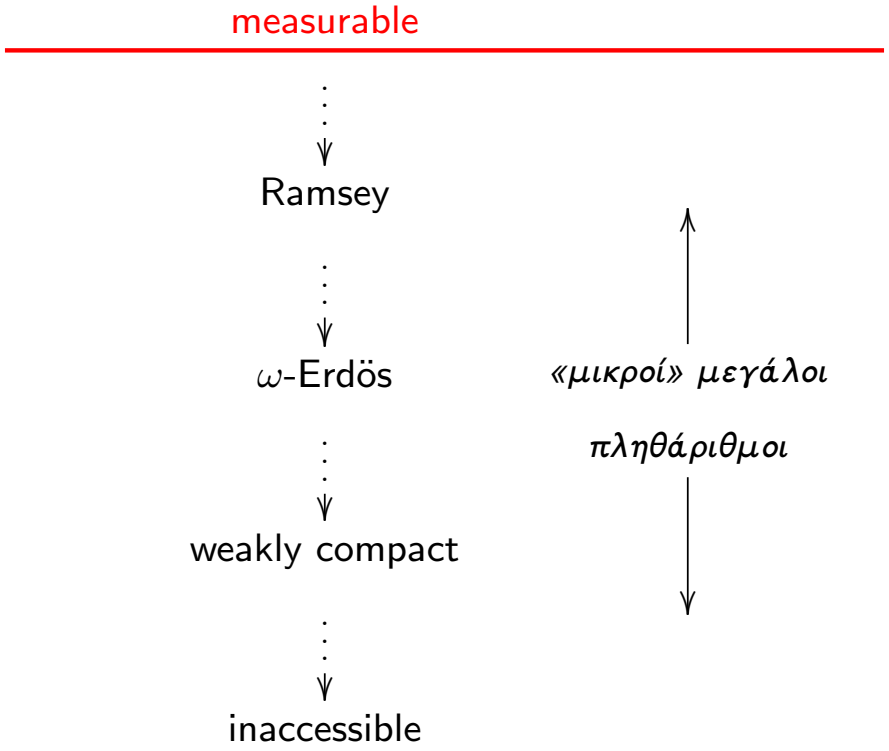
Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Ως «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι λογίζονται όλοι εκείνοι που είναι από measurable και πάνω.

Προς τους «μεγάλους» μεγάλους πληθαρίθμους

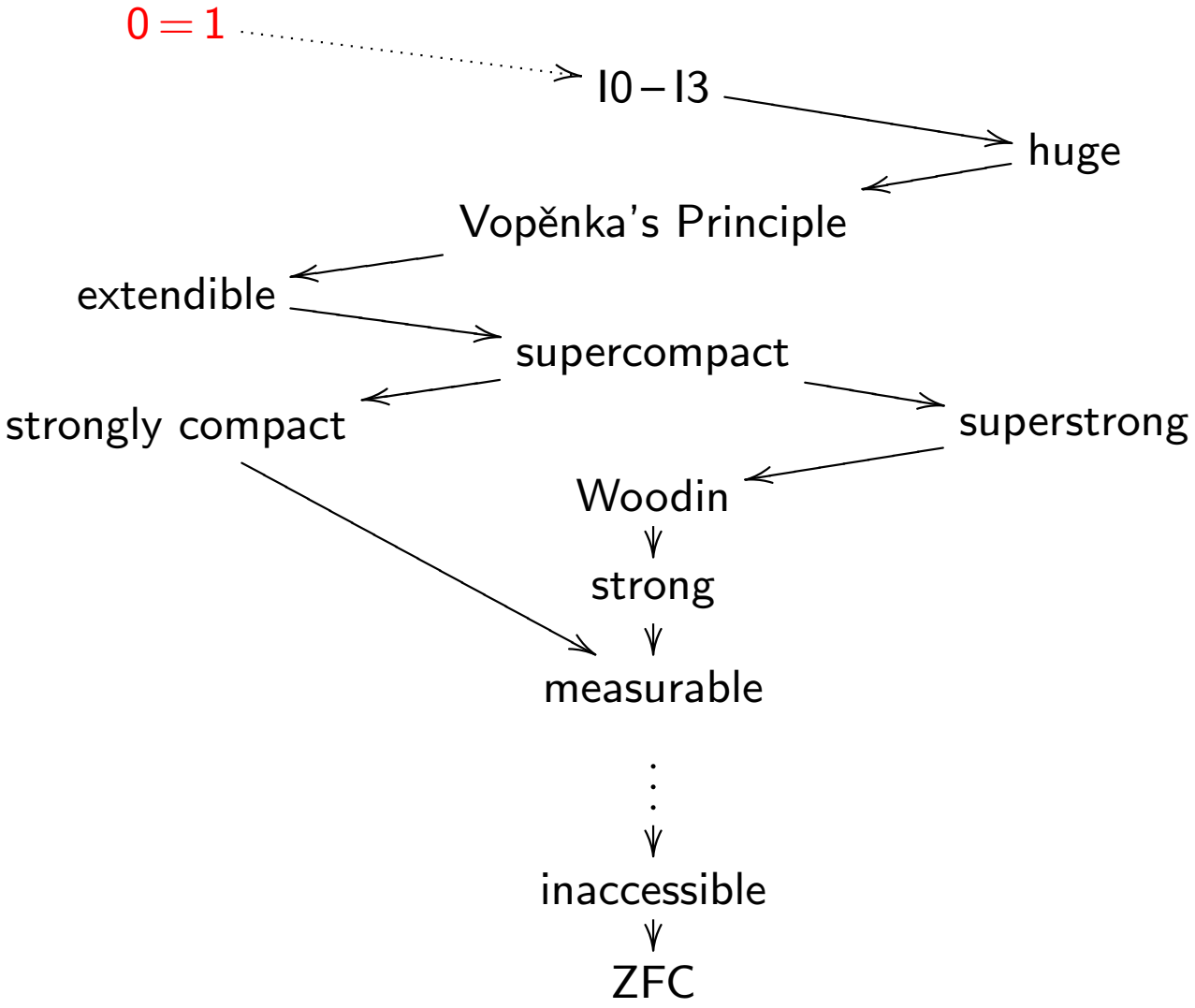
Οι «μικροί» μεγάλοι πληθάριθμοι τοποθετούνται στο διάγραμμα ως εξής:



Ως «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι λογίζονται όλοι εκείνοι που είναι από measurable και πάνω.

Οι «μεγάλοι» μεγάλοι πληθάριθμοι δεν είναι συμβατοί με το αξίωμα $V = L$.

Το διάγραμμα των μεγάλων πληθαρίθμων



Συνεχίζεται...